

個性を生かす数学教育

金 舂 俊 乍

Mathematical Education Developing Individuality

Shunsaku Kanemasu

1. 「桜の花」考

3月も終りに近いある日、ある新聞¹⁾に目を通していたら、次の記事が載っていた。個性を生かす教育——個の可能性をひき出す授業——を志向する上で参考になるので一部抜粋する。

“広島・平和公園の桜があつという間に開いた。そこは木それぞれの個性があるのだろう。見たところ満開に近いのがあるかと思うと、その隣にまだツボミのままのがある。気の早い木、悠然の木、……。ことしは、たいそう変わっている。ふつうなら桜前線たるもの、日に20キロ余りのペースで北上していくのを常とするが、ことしに限っては、なぜか西進。いや、行ったりきたりの千鳥足だ。まず関東、次いで九州。そして、東進中……。”

これまで、桜の花というものは、その地域においてはいっせいに開花するものと考えていたし、そのように信じこんでいた。ところがどうであろう。桜の木、一本一本をじっくり観察してみると、早く咲き、早く散っていく気の早い木もあれば、周りの木をいっさい気にせず、悠然と美しい花を咲かせている木もあるのである。

また、桜前線についても同様である。南からだんだんと北上していくのがあたりまえと考えがちであるが、年によっては、天候によってはちがうのである。いったりきたりの千鳥足の年もあるのである。

同じ桜の木でありながら、一本一本の桜の木は、それぞれかけがえのない個性を持っているのである。

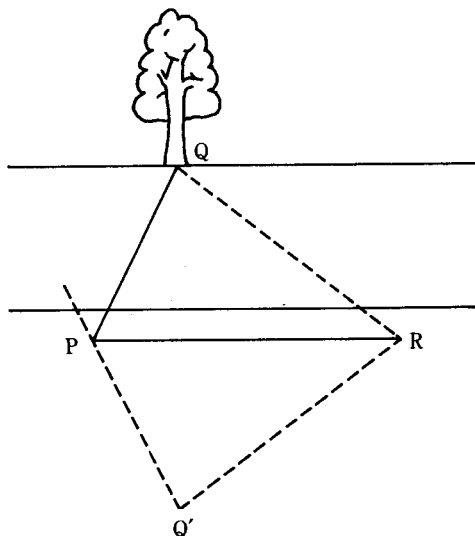
2. 個性的な存在としての生徒

それでは子ども達はどうか。教室の子ども達一人ひとりをじっくり観察してみるとそれぞれが実に個性豊かな存在であることに気づく。

たとえば、右の図を提示し、「P点から木までの距離を測りたい。しかし、川があって直接測れない。どうやって距離を求めたらいいだろうか。」という問いを投げかける。

子ども達はどんな発想をするだろうか。

これは、中学校2年生の「測量と縮図」の授業の導入場面である²⁾。



- 歩いて行けないのなら泳いでいけばよい。
- 泳げないのなら、船を使えばよい。
- 石にひもを結んで木に向かって投げ、木までのひもの長さを測ればよい。
- 木をじっと見つめて大きさを頭に入れ、頭に入れたその大きさの木をこちらの岸にうつし、そこまでの距離を測ればよい。

.....

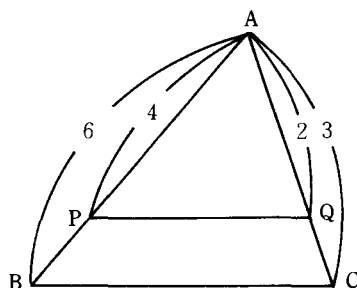
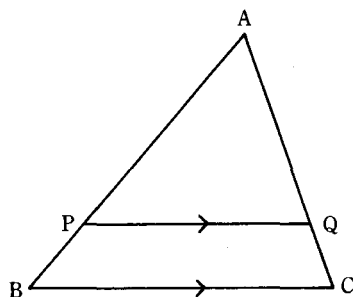
- P を通り QR に平行な直線と R を通り PQ に平行な直線との交点を Q' とすれば、Q' はこちらの岸にあるから P'Q' を測ればよい。
- PR の長さ、 $\angle QPR$, $\angle QRP$ の大きさを測り、 $\triangle PQR$ の縮図を書いて求めればよい。等々に見られるように、子ども達の発想は実に豊かであり、そぼくであり、個性的である。もう一つ例を示す。同じく中学校2年生の「平行線と比」の学習である。この学習では、

$$PQ \parallel BC \iff \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{QC} \quad \dots(1)$$

$$PQ \parallel BC \iff \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \quad \dots(2)$$

の2つの定理の証明が主な内容である。この時、(1)の証明は容易にできるが、(2)の証明は簡単なようで案外抵抗がある。(2)の証明の解決に、子ども達がどのように個性を發揮したか述べる³⁾。

右の図を示し、「 $PQ \parallel BC$ ならば、 $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ は成り立つだろうか」と尋ねる。この問いの解決にあたって、子ども達は実に多様な解き方を示す。(もちろん、多様な解き方へ導く指導法が重要なのだが、ここでは解き方の例だけ示す。)



ア. (1)の結論に数値を代入して、

$$AP : AB = AQ : AC \text{ だから}$$

$$AP = 4, AB = 6 \text{ とすると}$$

$$AQ = 2, AC = 3$$

$$\text{だから, } PB = 2$$

$$QC = 1$$

$$\therefore AP : PB = AQ : QC (=2 : 1)$$

この証明では子ども達が納得しないのは当然である。したがって、この証明の問題点を手がかりに、他の解き方へのアプローチの方法も考えられる。

イ. (1)の結論を式変形して

$$AP : AB = AQ : AC$$

$$AP : (AP + PB) = AQ : (AQ + QC)$$

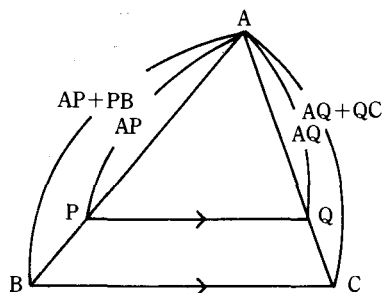
$$AP(AQ + QC) = AQ(AP + PB)$$

$$AP \times AQ + AP \times QC = AQ \times AP + AQ \times PB$$

つまり、

$$AP \times QC = AQ \times PB$$

$$\therefore AP : PB = AQ : QC$$



ウ. 三角形の等積変形を利用して
 $PQ \parallel BC$ だから, $\triangle PBQ = \triangle QCP$
 $\triangle APQ : \triangle PBQ = AP : PB$
 $\triangle APQ : \triangle QCP = AQ : QC$
 だから,

$$AP : PB = AQ : QC$$

エ. 三角形の相似を利用して,
 Q を通って, AB に平行線 QR
 を引く。

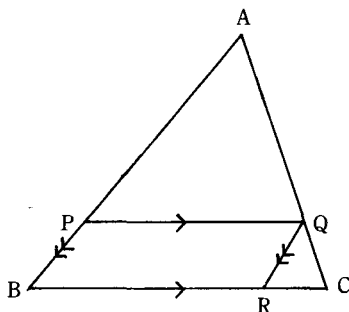
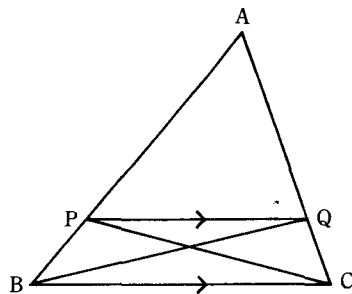
2角相等で $\triangle APQ \sim \triangle QRC$

また, $PB = QR$ で

$$\begin{aligned} AP : PB &= AP : QR \\ &= AQ : QC \end{aligned}$$

$PQ \parallel BC$ ならば $AP : PB = AQ : QC$ が成り立つことの証明を, 子ども達は4通りの方法で示した。いずれもユニークな証明の方法である。子ども達は問題や疑問に対して, 解決の場と時間を与えれば実に多様な解決方法を考え, 個性を発揮するのである。

以上, 2つの例を示したが, 教室の子ども達も, 本来は個性豊かな存在なのである。



3. 個性を生かす教育について

(1) 今, なぜ, 個性を生かす教育か

1や2の項で述べるまでもなく, 子ども達一人ひとりが個性豊かな存在であることは誰もが認めるところである。

それなのに, 最近の教育現場で生徒一人ひとりの個性を生かし, 伸ばす教育の重要性がこれほど話題になり問われるようになった背景は何であるか。

その発端は何といっても, 昭和60年6月26日臨時教育審議会が第一次答申で「個性重視の原則」を教育改革の基本的な原則として位置づけたことによるものである。この原則にかかわって指適された基本的な方向は, 「自他の個性を知り, 自他の個性を尊重し, 自他の個性を生かす教育の重要性」である。

“この指適をどのように解釈するか。”この解釈が“今, なぜ, 個性教育を問題にするのか”という問題の答えになりそうである。この指適には次の2つの理由が考えられよう。

1つは, これまでの学校教育の反省の上に立っての解釈である。これまでの一斉・画一的な教育・知識優先の教育では一人ひとりのよさ・一人ひとりの持ち味が生かされないということへの指適である。一人ひとりを生かす教育の大切さを唱えながらも没個性教育をしていることへの反省である。

他の1つは, 国際化社会, 情報化社会へ対応してのこれからの学校教育のあるべき姿を求めた解釈である。これは, 生涯学習の視点から今の学校教育のあるべき姿を問い直し, 一人ひとりの個性を開発し, たくましく生きぬく人間を育てる積極的な面からの解釈である。

(2) 個性とは何か

次に、個性とは何か、個性をとらえる視点としてはどのようなことが考えらるか明らかにしておきたい。個性たるものの正体を探らずして、個性教育を進めることはやや問題があるからである。

「個性とは何か」について梶田叡一氏⁴⁾は明解な解答を示唆してくれている。

……真の個性とは、けっして外見上のことではない。おとなしく目立たない人の中にも、真に個性的な人がいないわけではない。個性とは究極的には一人ひとりの内面世界に関わるものである。つまり、その人の実感と納得と本音の世界、その人なりの見方、考え方、感じ方の世界に関わるものなのである。……

我々は個性というと、直接眼に見える外見的なもの、ファッションなどにより、人とはちがうものにとらえることが多い。しかし、真の個性とは、一人ひとりの内面世界に関わるものである。したがって、個性を生かす教育とは人となりがった人間を育てることではない。他者(集団)と深くかかわりあいながら、自分らしさを発揮できる人間を育てることなのである。

つまり、子ども達一人ひとりの実感と納得と本音(情意)を大切に、生かす教育を進めることであり、他と深くかかわりあいながら見方、考え方、感じ方(自ら考える意欲と創造的に活動する能力)を育てる教育なのである。

(3) 個性を生かす数学科の授業・その条件

それでは算数・数学教育(初等数学教育)において個性を生かす教育・授業はどうあればよいだろうか。この問題を考えるにあたっては、まず数学という学問がどのような性格をもっているか明らかにしておく必要がある。

言うまでもなく、数学という学問(教科)は学問としての性格上、「客観的な数学的事実」を内容として系統的に構成されている。しかもこの「客観的な数学的事実」は過去の先人達の研究の成果をまとめたものである。

したがって、この数学的事実(教材内容)に対して直接的に自分の内面世界をぶつけることは不可能なことである。(数学的事実を発見する過程において、研究者はおおいに個性を発揮したと想像できるが)、このような数学という教科の性格を考えたとき、数学科における「個性」は数学的事実を学ばせる「学ばせ方の過程」において発揮できるものとする。

つまり、

- 数学的事実(問題)を知らせる過程において。
- 数学的事実(問題)をさまざまな角度から分析させる過程において。
- 数学的事実(問題)を解決する過程において。
- 数学的事実(問題)を振り返る過程において。

一人ひとりの子どもの個性が発揮できるのであり、指導する側からいえば子ども一人ひとりの個性が発揮できる働きかけ・授業づくりをめざさなければならないのである。

以上の観点から、算数・数学科における「個性を生かす授業づくりの大切な柱・条件として次の5点を重視したい⁵⁾。

- ① 第1の条件は、教材を豊かに創造し、「よい問題」を提示することである。

教材を豊かに創造するという事は、生徒の経験や体験を重視し、生徒の知的好奇心をゆさぶる教材づくりを工夫することであり、「よい問題」とは、次に示す条件を満たす問題である。

- 興味・関心を刺激する内容・問題であるかどうか。

- これまでの経験や既有知識と何らかのかかわりのある内容・問題であるかどうか。
 - 自分なりに解決できる見通しの立てられる内容・問題であるかどうか。
 - 多少の困難性なり抵抗の感じられる内容・問題であるかどうか。
 - 1つの考え方・解き方でなく多様な考え方、解き方がひきだせる内容・問題であるかどうか。
- ② 第2の条件は、つとめて発散的な思考を促す開いた発問を工夫することである。
- 生徒の学習のきっかけを促し、個性的な考え、疑問、あるいはつまづきを学習の場に出させるには教師の投げかける発問・提示が重要な鍵となる。次のような発散的な思考を誘発する開いた発問を工夫することが大切である。
- どうなるだろうか。どのように考えたらいいだろうか。
 - どうしてだろうか。なぜだろうか。その理由は。
 - これでいいのだろうか。他に考え方はないのだろうか。
- ③ 第3の条件は、自己表現活動を促し、生かす指導を進めることである。
- 生徒の中には、自分の思っていること、考えていること等を素直に、気楽に表現できる生徒と表現できない生徒がいるのが現状である。こういうさまざまな生徒の実態をよく理解し、言葉だけでなく内的行動（つぶやき、疑問、ノート、あるいは表情、……）をとらえてやり、それをつとめて生かしてやることである。そして、みんなと違う意見、少数意見を大切にされた指導を心がけることである。
- ④ 第4の条件は、自分なりに、じっくりと考え、解くことのできる機会と場を保障することである。
- 数学の学習では、与えられた問題の意味がわかるためには意外に時間を要するものである。また、問題解決においては、結果的には極めて簡単なことであっても、それに気づくまでは容易なことではなく、個人差が大きく表れてくる。
- 個性を育てるには、問題が何を尋ねているのか問う力、解決のためには何をどのように使えばよいか見通しをもつ力、そして、問題解決に向かってねばり強く追求していく力を育てることこそ大切なことである。そのために、個人でじっくりと考えたり、解くことのできる機会と場を十分に保障したいものである。
- ⑤ 第5の条件は、意欲につながる適切な評価を与えることである。
- 学習したことが、一人ひとりに定着し、しかもそれを次の学習へのエネルギーとしていくには評価は重要な役割を果たす。学習過程における理解度のチェックはもちろんのこと、「いい考えだ」「よくがんばった」、……というような学習方法、学習態度に視点をあてた意欲を起こさせる評価をタイミングよく与えてやるのが大切である。
- 理解のおそい生徒にとって、学習から避難している生徒にとって、教師のあるいは友達のものにげない一言や励ましが意欲となって表れることはよく経験することである。
- 以上、個性を生かす授業づくりを進めるにあたっての5つの条件を述べたが、もう1つ、忘れてはならないものがある。それは、個が生き、個を生かす学習集団＝(支持的風土を備えた学習集団)を育てることである。
- 数学の勉強は、「わからない」から「わかる」ために学ぶものであり、「解けない」から「解ける」ために学ぶものである。この学ぶ過程において数学科でめざす力が身につくのである。
- こういった意味において、支持的風土を備えた学習集団を育てることは、個性が生きる授業づくりを進める上での基盤となるものである。

5. 個性を生かす数学科の授業

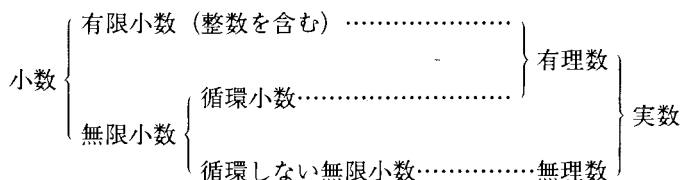
——有理数と無理数のちがいを理解させる学習指導——

それでは、個性を生かす数学科の授業の実際を、中学校3年生の教材内容である「有理数と無理数」の題材に視点をあてて述べる。

(1) 教材について

有理数とは、整数分の整数 (m/n , m は整数 n は正の整数) という形で表すことのできる数である。この有理数を小数で表すと、有限小数 (整数を含む) か循環小数のいずれかになる。

一方、無理数とは、循環しない無限小数のことであり、根号のついた数、 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ……や円周率 π などの数がこれにあたる。そして、有理数と無理数をあわせて実数という。



このように、数の小数表示に視点をあてることによって有理数と無理数のちがいを追求させることは、数を統合的に理解させる上で意義がある。

この指導のねらいは、有理数と無理数のちがいを明らかにしていく中で、 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ……などの数が無理数であることを知らせ、実数の数体系をまとめさせようとするものである。

(2) 指導にあたって (生徒の実態)

この学習指導にあたって、「分数と小数の間にはどのような関係があるか。」、尋ねてみた。生徒の反応の主なものをあげると、

- 分数は小数になおすことができ、逆に、小数は分数になおすことができる。
- 小数は分数になおせるが、分数は小数になおせるとは限らない
- 分数を小数にする場合、分子÷分母だが無理数になる場合もある。
- 小数で書き表せないものを分数で書くことができる。
- ……

等々であり、分数と小数の関係についての生徒の認識は浅く、生徒の小数概念についての認識は有限小数までの段階である。このことから平方根の学習を終えたこの時期に、有理数の分数表示、小数表示の理解を深め、有理数と無理数の違いがどこにあるか、生徒自らの考えで探らせる指導が大切である。

(3) 個性的な考えをひきだす問題提示

生徒の実態をふまえ、問題提示にあたっては次のような、今まで学んできたいろいろな数の小数表示を模造紙に書いて示した。

$\frac{1}{2}=0.5$	$\frac{1}{4}=0.25$	$\frac{3}{4}=0.75$	$\frac{1}{8}=0.125, \dots$
$\frac{1}{5}=0.2$	$\frac{3}{5}=0.6$	$\frac{1}{25}=0.04$	$\frac{6}{25}=0.24, \dots$
$\frac{1}{10}=0.1$	$\frac{7}{20}=0.35, \dots$		
$\frac{1}{3}=0.33333333\dots$	$\frac{1}{6}=0.16666666\dots$		
$\frac{1}{7}=0.142857142857\dots$	$\frac{1}{11}=0.0909090909\dots$		
$\frac{1}{13}=0.076923076923\dots$			
$\sqrt{2}=1.414213562373095\dots$			
$\sqrt{3}=1.7320508075688\dots$			
$\sqrt{10}=3.1622776601683\dots$			

そして、

これらの数(数と小数表示の関係)を見て、気づいたこと、疑問に思うこと、調べてみたいことはないだろうか？

と問いかけ、数の集合と小数表示の間にはどのような関係があるのか、じっくり追求させた。生徒一人ひとりの個性的な発想を促すためである。

(4) 生徒の疑問と学習課題

この発問に対する生徒の反応はさまざまである。次に見られるように、まさにその子らしい疑問や課題が出てきた。

- 分数でも小数になおせる数となおせない数がある。
- 分数は小数になおせないものがあるけど、小数は分数になおせる。
- 分数を小数になおしたとき、完全になおせるものと、同じ数が続くものがあれば、 $\frac{1}{7}$ のように、 $0.142857142857\dots$ と同じように数が続くことがある。どうしてなのか？
- 循環する小数は分数になおせるのか？ それはどうすればよいのか？
- $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ は、どうして循環しない小数になるのか？ ほんとうに循環しないのか？
- ……………。

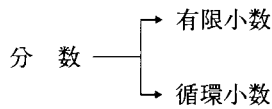
これらの疑問や気づきは、これまでの学習経験から生まれたものである。分数でも小数に表せないものがあるとは、 $0.333333\dots$ のような無限小数は小数(数)として考えられないのである。

そこで、これらの気づき、疑問を次の5つの共通課題に整理した。

- 課題1. どんな分数が有限小数になり、また、どんな分数が循環する小数になるのか？
- 課題2. 有限小数になる分数にはどんな特徴があるのか、それはどうしてか？
- 課題3. 循環する小数になる分数にはどんな特徴があるのか、それはどうしてか？
- 課題4. 有限小数を分数に、循環小数を分数になおすにはどうしたらよいのか？
- 課題5. $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ はどうして循環しない無限小数になるのか？

(5) 課題解決に個性を発揮させる

課題1は、



分数を小数になおすと、有限小数か循環する小数のどちらかになること、そして、どんな分数が有限小数になり、また、どんな分数が循環する小数になるのかを見つけることである。

この課題の解決にあたっては、いろいろな分数を実際に小数になおして調べることにした。

方法としては、各班毎に、 $1 \div \square$ の \square に1から順番に、1, 2, 3, 4, …… 39, 40 と数を代入して計算することから始めた。(各班はそれぞれ4名の班員から構成されているから、一人、10個の計算を分担することになる。)

ところが、 $\frac{1}{17}$ の計算、

$$\begin{array}{r}
 0.05882352941176\cdots \\
 17 \overline{) 100} \\
 \underline{85} \\
 150 \\
 \underline{136} \\
 140 \quad \text{※ほんとうに、循環する} \\
 \underline{136} \quad \text{のだろうか?} \\
 40 \\
 \underline{34} \\
 60 \\
 \underline{51} \\
 90 \\
 \underline{85} \\
 50 \\
 \underline{34} \\
 160 \\
 \underline{153} \\
 70 \\
 \underline{68} \\
 20 \\
 \underline{17} \\
 30 \\
 \underline{17} \\
 130 \\
 \underline{119} \\
 110 \\
 \underline{102} \\
 80 \\
 \cdots \\
 \cdots
 \end{array}$$

$\frac{1}{19}$ の計算 $\frac{1}{19} = 0.05263157894736842105263157\cdots$

$\frac{1}{23}$ の計算 $\frac{1}{23} = 0.04347826086956521739130434\cdots$

$\frac{1}{29}$ の計算 $\frac{1}{29} = 0.034482758620689655172413793103448\cdots$

などの計算を受持った生徒は大変である。なかなか循環しなく、途中で計算まちがいを発見

して途方にくれている生徒や、「先生、ほんとうに循環するのですか。」と真剣に問う生徒、自分の分担が終わってホッとしている生徒、友達の計算を手伝う生徒、……等々と活気に満ちた姿が教室に見られた。

次に示す表は、生徒一人ひとりが苦勞して、しかも、力を合わせて計算した結果を表にまとめたものである。

$\frac{1}{1}=1$	
$\frac{1}{2}=0.5$	
$\frac{1}{3}=0.333333\cdots$	
$\frac{1}{4}=0.25$	
~~~~~	
$\frac{1}{34}=0.0294117647058823529411764\cdots$	
$\frac{1}{35}=0.0285714285714\cdots$	
$\frac{1}{36}=0.02777777\cdots$	
$\frac{1}{37}=0.027027027027\cdots$	
$\frac{1}{38}=0.026315789473684210526315\cdots$	
$\frac{1}{39}=0.0256410256410\cdots$	
$\frac{1}{40}=0.025$	

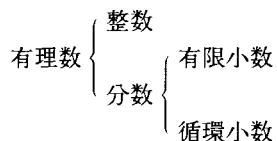
この表を見ると、

- 分数を小数に直すと有限小数か循環小数のいずれかになること。
- 有限小数になるときの分数の特徴、および循環小数になる分数の特徴。

は容易に理解できることである。

なお、課題2、課題3、および課題4の解決については紙面の都合で省略するが生徒なりの考えで、生徒なりの努力で一応の結論を導き出したことを付け加えておく。

こういう学習（実際体験）を通してはじめて有理数の世界



が実感として理解できるのである。

(6)  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots$  が循環しない無限小数になる

課題5は、 $\sqrt{2}$  や  $\sqrt{3}$ , …… がどうして循環しない無限小数になるのかを追求させる学習である。

この内容については、生徒はすでに区間縮小法による近似値の求め方、および10までの数の平方根の近似値の覚え方の学習である程度の予備知識はもっている。しかし、これらの知識は





子ども達一人ひとりの願いをしっかりと受けとめ、真に個性が生き、伸びる教育実践を進めた  
ものである。

<引用および参考文献>

- 1) 中国新聞「天風録」より
- 2) 広島大学附属三原中学校著「自己表現活動を生かす授業の創造」119ページ，ぎょうせい 1983年
- 3) 広島大学附属三原中学校著「自己表現活動を促す授業の創造」79ページ～83ページ，ぎょうせい  
1982年
- 4) 梶田毅一著「真の個性教育とは」13ページ，国土社 1987年
- 梶田毅一著「生き生きした学校教育を創る」有斐閣 1982年
- 奥田真丈他監修「小学校学習指導要領の解説と展開——算数編——」教育出版 1989年

(初等教育学科 講師)  
—平成元年9月5日 受理—