

滑らかな円管内流れに関する管摩擦係数の Prandtl-Karmanの式の陽的近似式

黄 樹偉

(令和元年10月8日受理)

An Explicit Approximation of the Prandtl-Karman Equation for the Friction Factor of Smooth Pipes

Shuwei HUANG

(Received October 8, 2019)

An simple explicit approximation of the Prandtl-Karman equation for the friction factor of smooth pipes, $\lambda = 1/(-61 + 36.84\text{Re}^{0.1})$, was obtained by using CurveExpert for regression analysis. The data of friction factors were accurately calculated from the inverse function of the Prandtl-Karman equation, instead of approximate values by the usual iterative method.

The obtained approximation has a standard deviation of relative errors to the Prandtl-Karman equation of 0.082% over the whole range of desired Reynolds numbers ($\text{Re} = 10^5 \sim 10^7$), with all relative errors being within the range of $-0.239\% \sim +0.180\%$. Such errors are shown to be about one order of magnitude smaller than those of all other simple approximate equations compared.

Keyword : Prandtl-Karman Equation, Explicit Approximation, Friction Factor, Smooth Pipes, Implicit Function, Inverse Function

滑らかな円管の管摩擦係数 λ の計算に用いる Prandtl-Karman の式に対し, 回帰解析ソフトウェア CurveExpert を用いて, 簡易な陽的近似式 $\lambda = 1/(-61 + 36.84\text{Re}^{0.1})$ を得た。回帰に用いた λ の値は従来の繰り返し法による近似値ではなく, Prandtl-Karman の式の逆関数から直接計算した正確な値であった。

この簡易な近似式の予測値は所定レイノルズ数 $\text{Re} = 10^5 \sim 10^7$ 内において, Prandtl-Karman の式との相対誤差の標準偏差は 0.082% のみで, 全ての相対誤差は $-0.239\% \sim +0.180\%$ の範囲内におさまることと, この誤差範囲

は比較されたほかの比較的簡易な近似式または実験式に比べ、1ケタ程度小さいものであることがわかった。

キーワード：プラントル・カルマンの式，陽的近似式，管摩擦係数，滑管，隠関数，逆関数

1. はじめに

水が水道管の中を流れるような管内流は，工業設備だけではなく，生活のインフラにも広く応用されている。管内流の流体が流れるときのエネルギー損失は一般に損失ヘッド h_f で表され，この損失ヘッド h_f は通常，次のダルシー・ワイズバッハの式で計算される^[1-4]。

$$h_f = \lambda \frac{l V^2}{d 2g} \quad (1)$$

式中， l ， d ， V と g はそれぞれ，管の長さ，直径，流体の平均流速および重力加速度である。また， λ は管摩擦係数 (friction factor) という無次元係数である。

λ は流れの状態と管壁面の粗さにより決定される係数である。管内流に関わる管路設計などでは，この λ の値の計算は重要な課題の1つである。

層流の場合，管壁面の粗さによらず，すべて次式で計算できることが解析的にわかっている^[1-4]。

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (2)$$

式中の Re は，流れの断面平均流速と管内径に基づくレイノルズ数 (以下， Re 数) である。管内流の場合，層流の臨界 Re 数は一般に2300とされている^[1-3]。

Re 数が臨界値を超える乱流領域では， λ の解析解が得られないため，その値は実験結果から直接得た経験式，または理論解析と実験結果を総合して得られる半経験式で計算しなければならない。管壁面が粗い粗管の場合は Colebrook の式^[1-2, 4-6] または，これに基づく Moody 線図^[1-2, 4-6] が使用されるが，壁面が滑らかな滑管の場合は，次のように計算される。

$\text{Re} = 3 \times 10^3 \sim 1 \times 10^5$ の時に，次の Blasius の式が用いられる^[1-4]。

$$\lambda = 0.3164 \cdot \text{Re}^{-1/4} \quad (3)$$

より発達した乱流 ($\text{Re} = 1 \times 10^5 \sim 1 \times 10^7$) では次の Prandtl-Karman の式 (以降，P-K 式と称する) が使用される^[1-4]。

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(\frac{\text{Re} \sqrt{\lambda}}{2.52} \right) \quad (4)$$

しかしながら，P-K 式では λ は隠関数の形として与えられるため， λ の計算は手間のかかる繰り返し法を用いる必要がある。このため， $\text{Re} = 1 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6$ の場合，次のより簡単な Nikuradse の実験式(5)^[1, 7] をはじめ種々の計算式^[7] が使用または提案^[8] されている。

$$\lambda = 0.0032 + 0.221 \cdot \text{Re}^{-0.237} \quad (5)$$

式(3)~(5)は，文献によっては適用される Re 数の範囲は幾分異なるものの，Nikuradse らの実験結果^[1, 2, 4] から，Blasius の式は $\text{Re} \leq 1 \times 10^5$ の比較的低 Re 数の乱流に適用し，P-K 式は低い乱流 Re 数から 10^7 オーダーのような高 Re 数までその実験結果に一致していることがわかる。また，P-K 式は超音速および亜音速の圧縮性流れにも成立し，滑面円管の“普遍的抵抗法則”と呼ばれることがある^[4]。しかしながら，式(3)のように Re 数を与えると， λ を便利に算出できるのに比べ，

P-K 式による計算は非常に不便である。このため、P-K 式はその高い精度^[3, 4]と高 Re 数領域への適用能力^[4]が知られながらも、実用に向かないとの指摘^[8]もあった。そこで、Re 数が $1 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6$ の領域では Nikuradse の実験式(5)が代用される。

本研究の目的は式(4)により精確に計算される λ の値を用いて、陽関数の形式で Re 数が $1 \times 10^5 \sim 1 \times 10^7$ の高 Re 数領域において P-K 式を代用する λ の簡易な近似式を求めることである。

2. P-K式の精確解

P-K式(4)は、 λ が隠関数であるため、いままでは繰り返し法で λ を近似値として計算する必要があった。即ち、Re の値を与えてから、試しに λ にも値を与え、両者を式(4)に代入し、式の両側が等しくなるように λ の値を逐次修正していく方法である。これはかなり手間のかかる作業だけでなく、この方法で求められるのはあくまでも λ の近似値でしかない。

P-K 式の精確解を得るため、本研究は、 λ が Re の単調関数であることに着目し、Re を λ の関数として方程式(4)を解いて、次の逆関数を得た。

$$\text{Re} = \frac{2.52}{\sqrt{\lambda}} 10^{\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}} \quad (6)$$

式(6)は、Re が λ の陽関数となっているので、 λ を与えると、精確な Re 値を計算できる。また、 λ 値の範囲と増分を自由に設定できるので、回帰に必要な (Re, λ) データを得ることができる。

3. 近似式の求め方と結果

3.1 近似式の関数形式について

近似式を最小二乗法で求める場合、通常、その関数形式を先に決定し、この式による計算値と実験値の残差平方和が最小となるように式に含まれる未定係数を決定する方法が取られている。本研究で用いたソフトウェアは CurveExpert Ver.1.4^[9]で、このバージョンには35種類のフィッティング関数（最新バージョン2.6.5では65種類）が内蔵しており、CurveFinder という命令を実行すれば、ユーザー定義関数を含めてこれらの関数が全て評価される。評価の結果は相関係数の大きいものから順に標準偏差と一緒に、それぞれ表示される。そこから最適なフィッティング関数（近似式）を選ぶ。本研究では、 λ 値を0.0180から0.0081まで増分-0.0001変化させ、式(6)で精確計算された100組の (Re_i, λ_i) ($i=1, 2, \dots, 100$) を実験値としてソフトに入力した。CurveFinder 命令を実行したところ、次の Harrisモデル（フィッティング関数）は相関係数が最も 1 に近いものとして表示された。

$$y = \frac{1}{(a + bx^c)} \quad (7)$$

式中、 a , b , c は3つの定数でその値は図1(a)に示される。

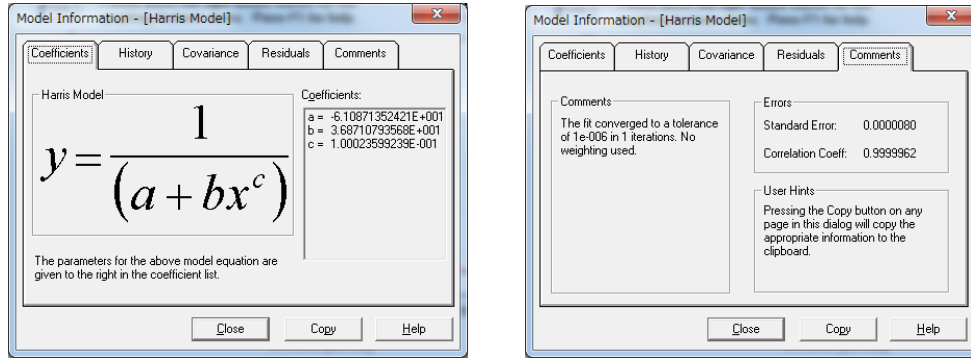
順位2以降にも幾つかの関数が同程度の相関係数を示しているが、いずれも式(7)に比べかなり複雑なため、式(7)の関数を採用した。

3.2 近似式の係数と指数の実用化

図1(b)に示すように、CurveExpert Ver.1.4が見出した Harrisモデル（Ver.2.6.5ではFarazdaghi-Harris モデルと称している）の相関係数は0.9999962に達し、標準偏差は0.0000080であるので、

近似式として精度が非常に高いものであることがわかる。従って、次式はP-K式の近似式とすることができる。

$$\lambda = \frac{1}{-61.0871352421 + 36.8710793568 \text{Re}^{0.100023599239}} \quad (8)$$



(a) 近似式の形式と定数の値

(b) 近似式の相関係数と標準偏差

図1 CurveExpertが見出した近似式及び統計解析結果

しかしながら、3つの定数 a , b , c は、それぞれ12桁にも及ぶ長い数字で、実用上不便なため、次のように微調整を行った。

まず、指数 c は、0.1との相対誤差が0.002%程度しかないので、これを0.1として丸めた。次に、係数 a は、-61との相対誤差が0.14%しかないので、これを-61とした。また、これらの丸め処理により発生した誤差は係数 b の微調整で一部吸収させるため、式(9)に示すユーザー定義関数をCurveExpertに入力して再度 b の値を求めた。最後は式(10)をP-K式の近似式とした。

$$y = \frac{1}{-61 + b x^{0.1}} \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{1}{-61 + 36.84 \text{Re}^{0.1}} \quad (10)$$

近似式(10)の精度を評価するために、その計算結果を表1中に示す。表中の $\Delta \lambda_{\text{rel}}$ は、P-K式による精確値に対する相対誤差である。統計解析結果から、近似式とP-K式両者の λ 計算値の相関係数 R と標準偏差 σ はそれぞれ、 $R = 0.9999961$, $\sigma = 0.0000084$ であることがわかった。表1から、 $\text{Re} = 10^5 \sim 10^7$ 内において、近似式(10)の相対誤差 $\Delta \lambda_{\text{rel}}$ は $-0.239\% \sim +0.180\%$ の範囲内に納まることわかる。また、これらの相対誤差の標準偏差 σ_r は0.082%のみであることもわかった。

4. 諸実験式及び他の近似式との比較

近似式(10)の有効性を評価するため、ほかの計算式との比較を行った。比較対象は、実験式と三種類の近似式とした。

実験式は、 $\text{Re} = 1 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6$ の範囲に適用できるとされる Nikuradseの実験式(5)及び次の葦埜ら^[8]の半経験式(11)とした。

$$\lambda = \frac{0.285}{(\log \text{Re} - 1.02)^2} \quad (\text{Re} \geq 2 \times 10^4) \quad (11)$$

表1 Prandtl-Karmanの式(4)と近似式(10)の λ 計算結果の比較

No	Re	Eq.(4)	Eq.(10)	$\Delta\lambda$	$\Delta\lambda_{rel}$	No	Re	Eq.(4)	Eq.(10)	$\Delta\lambda$	$\Delta\lambda_{rel}$
1	100125	0.0180	0.01801	0.000014	0.077%	26	536684	0.0130	0.01302	0.000019	0.143%
2	105645	0.0178	0.01781	0.000013	0.071%	27	585077	0.0128	0.01282	0.000019	0.150%
3	111567	0.0176	0.01761	0.000012	0.066%	28	639101	0.0126	0.01262	0.000020	0.156%
4	117928	0.0174	0.01741	0.000011	0.063%	29	699556	0.0124	0.01242	0.000020	0.162%
5	124767	0.0172	0.01721	0.000010	0.060%	30	767375	0.0122	0.01222	0.000020	0.167%
6	132130	0.0170	0.01701	0.000010	0.057%	31	843654	0.0120	0.01202	0.000021	0.172%
7	140065	0.0168	0.01681	0.000009	0.056%	32	929678	0.0118	0.01182	0.000021	0.176%
8	148627	0.0166	0.01661	0.000009	0.056%	33	1026963	0.0116	0.01162	0.000021	0.178%
9	157878	0.0164	0.01641	0.000009	0.056%	34	1137306	0.0114	0.01142	0.000020	0.180%
10	167886	0.0162	0.01621	0.000009	0.057%	35	1262837	0.0112	0.01122	0.000020	0.180%
11	178726	0.0160	0.01601	0.000009	0.059%	36	1406103	0.0110	0.01102	0.000020	0.178%
12	190484	0.0158	0.01581	0.000010	0.061%	37	1570149	0.0108	0.01082	0.000019	0.175%
13	203255	0.0156	0.01561	0.000010	0.064%	38	1758640	0.0106	0.01062	0.000018	0.169%
14	217148	0.0154	0.01541	0.000010	0.068%	39	1976001	0.0104	0.01042	0.000017	0.161%
15	232281	0.0152	0.01521	0.000011	0.072%	40	2227605	0.0102	0.01022	0.000015	0.150%
16	248793	0.0150	0.01501	0.000012	0.077%	41	2520000	0.0100	0.01001	0.000014	0.136%
17	266836	0.0148	0.01481	0.000012	0.082%	42	2861213	0.0098	0.00981	0.000012	0.118%
18	286585	0.0146	0.01461	0.000013	0.088%	43	3261133	0.0096	0.00961	0.000009	0.097%
19	308238	0.0144	0.01441	0.000014	0.094%	44	3732010	0.0094	0.00941	0.000007	0.072%
20	332019	0.0142	0.01421	0.000014	0.101%	45	4289108	0.0092	0.00920	0.000004	0.041%
21	358185	0.0140	0.01402	0.000015	0.107%	46	4951560	0.0090	0.00900	0.000000	0.005%
22	387029	0.0138	0.01382	0.000016	0.114%	47	5743506	0.0088	0.00880	-0.000003	-0.036%
23	418886	0.0136	0.01362	0.000017	0.121%	48	6695607	0.0086	0.00859	-0.000007	-0.085%
24	454141	0.0134	0.01342	0.000017	0.129%	49	7847081	0.0084	0.00839	-0.000012	-0.140%
25	493236	0.0132	0.01322	0.000018	0.136%	50	10062678	0.0081	0.00808	-0.000019	-0.239%

3種類の近似式の1つ目は、比較的簡易な近似式で、Moodyの式^[5, 10]とRoundの式^[50, 11]を選んだ。2つ目は、近年に発表されたもので、Belucoらの式^[13]とした。3つ目は「きわめて精確」^[10]とされるもので、Romeoらの式^[10, 14]とした。但し、これらの式は、次のColebrookの式(P-K式を粗管の計算ができるまで拡張したもの)の近似式であるため、式中の相対粗度 ε/D (ε は粗管壁面の突起の等価粗さ、 D は管の内径)は、滑管の場合にはゼロとなる。

Colebrookの式^[1-6, 10-12]

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right) \quad \left(\begin{array}{l} 4 \times 10^3 \leq \text{Re} \leq 10^8 \\ 0 \leq \frac{\varepsilon}{D} \leq 0.05 \end{array} \right) \quad (12)$$

Moodyの式^[5, 10, 11]

$$\lambda = 0.0055 \left[1 + \left(20000 \frac{\varepsilon}{D} + \frac{10^6}{\text{Re}} \right)^{1/3} \right] \quad \left(\begin{array}{l} 4 \times 10^3 \leq \text{Re} \leq 10^8 \\ 0 \leq \frac{\varepsilon}{D} \leq 0.01 \end{array} \right) \quad (13)$$

Roundの式^[5, 10, 11]

$$\lambda = \left[-1.8 \log \left(0.135 \frac{\varepsilon}{D} + \frac{6.5}{\text{Re}} \right) \right]^{-2} \quad \left(\begin{array}{l} 4 \times 10^3 \leq \text{Re} \leq 10^8 \\ 0 \leq \frac{\varepsilon}{D} \leq 0.05 \end{array} \right) \quad (14)$$

Belucoらの式^[13]

$$\lambda = \frac{0.3009}{\left[\log \left(\left(\frac{\varepsilon}{3.7315D} \right)^{1.0954} + \left(\frac{5.9802}{\text{Re}} \right)^{0.9695} \right) \right]^2} \quad \left(\begin{array}{l} 3 \times 10^3 \leq \text{Re} \leq 10^8 \\ 0 \leq \frac{\varepsilon}{D} \leq 0.05 \end{array} \right) \quad (15)$$

Romeoらの式^[10, 14]

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left\{ \frac{\varepsilon/D}{3.7065} - \frac{5.0272}{\text{Re}} \log \left[\frac{\varepsilon/D}{3.827} - \frac{4.567}{\text{Re}} \log \left(\left(\frac{\varepsilon/D}{7.7918} \right)^{0.9924} + \left(\frac{5.3326}{208.815 + \text{Re}} \right)^{0.9345} \right) \right] \right\} \quad \left(\begin{array}{l} 3 \times 10^3 \leq \text{Re} \leq 1.5 \times 10^8 \\ 0 \leq \frac{\varepsilon}{D} \leq 0.05 \end{array} \right) \quad (16)$$

P-K 式に対する各計算式の相対誤差を図 2 に示す。

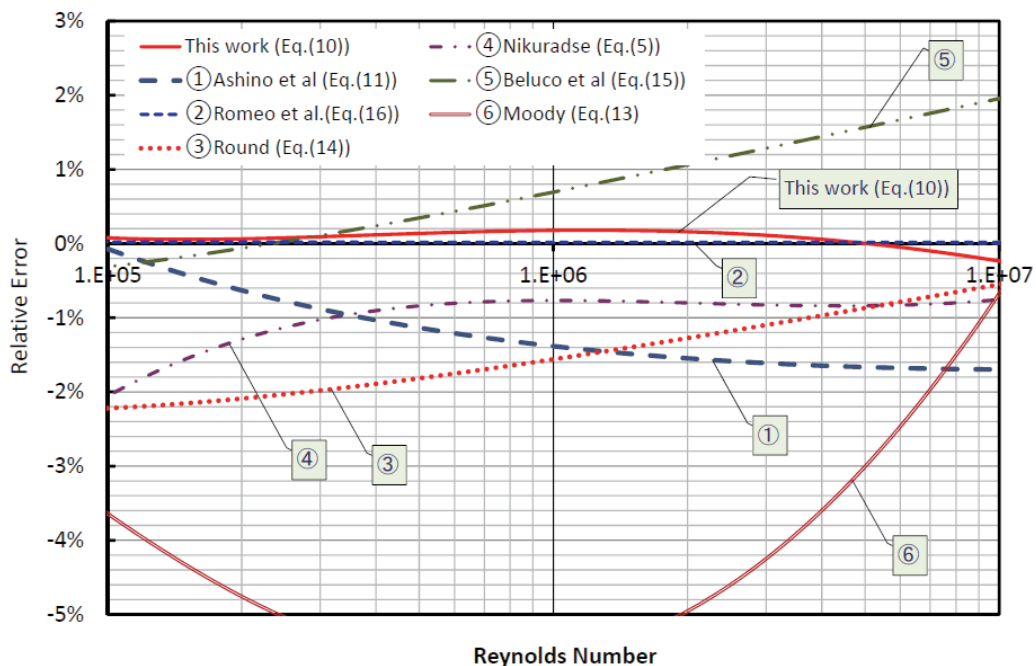


図 2 実験式及び諸近似式の P-K 式に対する相対誤差の比較

図 2 から、本研究で得られた近似式(10)は、 $\text{Re} = 10^7$ の近傍を除き、その適用範囲内において、P-K 式との相対誤差が $\pm 0.2\%$ 内に納まることがわかる。また、各式の最大誤差の幅について、式(10)は式(5)、(11)、(13)、(14)および(15)など全ての比較的簡易な式に比べ、およそ 1 桁小さいことが示されている。

一方、式(10)は Romeo らの式(16)に比べ、精度の面では後者に及ばないものの、両者の差はわずか

0.2%程度しかないので、後者の式の複雑さを考慮すれば、式(10)は十分高い精度を有する簡易式であると言える。

5. まとめ

本研究は滑らかな円管の管摩擦係数 λ が隠関数として与えられているP-K式(4)から、その逆関数の式(6)を得た。逆関数を用いてP-K式(4)を満足させる精確な (Re, λ) のデータを従来の繰り返し法に頼らず得ることができた。

得られた精確な (Re, λ) のデータを、回帰解析用ソフトウェアを用いて、これに最適なフィッティング関数を探し、 $1 \times 10^5 \leq Re \leq 1 \times 10^7$ 区間におけるP-K式の近似式 $\lambda = 1/(-61 + 36.84Re^{0.1})$ を得ることができた。

この近似式は簡易でありながら所定 Re 数範囲内に、P-K式との相対誤差の標準偏差は0.082%で、相対誤差の最大幅も0.239%のみであることがわかった。このような誤差の最大幅は、他の実験式や簡易な近似式にくらべ、およそ1ケタ小さいものである。

また、式(10)は式(16)に比べ、精度の面では後者に及ばないものの、両者の誤差の差はわずか0.2%程度しかないので、後者の式の複雑さを考慮すれば、式(10)は十分高い精度を有する簡易式であると言える。

参 考 文 献

- [1] 宮井善弘, 木田輝彦, 仲谷仁志, 卷幡敏秋『水力学』(第2版), 森北出版社, p.85(2014)
- [2] 生井武文, 井上雅弘『粘性流体の力学』, 理工学社, p.192(1978)
- [3] 加藤宏『流れの力学』, 丸善, pp.54, pp.57(1989)
- [4] 日本機械学会編『流体工学』, 機械工学便覧・基礎編 a 4, 日本機械学会pp. a 4-70(2006)
- [5] Srbišlav Genić, Ivan Arandjelović, Petar Kolendić, Marko Jarić, Nikola Budimir, Vojislav Genić, "A Review of Explicit Approximations of Colebrook's Equation", FME Transactions Vol. 39, No 2, pp.67-71(2011)
https://www.mas.bg.ac.rs/_media/istrazivanje/fme/vol39/2/04_mjaric.pdf
- [6] G. F. Hewitt, G.L. Shires, Yuri V. Polyzhaev, International Encyclopedia of Heat and Mass Transfer, CRC Press Inc, pp.488(1997)
- [7] 国清行夫, 木本知男, 長尾健『水力学』, 森北出版社, p.102, p.111(1984)
- [8] 葦埜勲, 吉田喜美事, "なめらかな円管内の乱流(第2報管摩擦係数)", 福井大学「工学部研究報告」第34巻第2号, pp.223-229(1986.9)
<https://core.ac.uk/download/pdf/59038833.pdf>
- [9] <https://www.curveexpert.net/>
- [10] Offor, U. H., Alabi, S. B., "An accurate and computationally efficient explicit friction factor model", Advances in Chemical Engineering and Science 06, pp.237-245, 2016.
<https://doi.org/10.4236/aces.2016.63024>.
- [11] Pérez-Pupo, J., Navarro-Ojeda, M., Pérez-Guerrero, J., & Batista-Zaldívar, M., "On the explicit expressions for the determination of the friction factor in turbulent regime",

- Revista Mexicana De Ingeniería Química, 19(1), pp.313-334, 2019.
<https://doi.org/10.24275/rmiq/Fen497>
- [12] Brkic, D., "Solution of the Implicit Colebrook Equation for Flow Friction Using Excel",
Spreadsheets in Education (eJSiE) : Vol.10 : Iss. 2, Article 2.(2017)
<http://epublications.bond.edu.au/ejsie/vol10/iss2/2>
- [13] Beluco, A and Schettini, E., "An Improved Expression for a Classical Type of Explicit
Approximation of the Colebrook White Equation with Only One Internal Iteration",
International Journal of Hydraulic Engineering 5(1), pp.19-23, 2016,
DOI: 10.5923/j.ijhe.20160501.03
- [14] Romeo, E., Royo, C. Monzón, A., "Improved explicit equations for estimation of the friction
factor in rough and smooth pipes", Chemical Engineering Journal, Volume 86, Issue 3, 28, pp.
369-374, 2002.