

ヴァイオリンの弦の振動の観察

村本直己* 前田裕司

(平成18年9月20日受理)

Measurement of string vibration in violin playing

Naomi MURAMOTO and Hiroshi MAETA

(Received September 20, 2006)

The vibration of the string of a violin is known to be a triangular wave according to Helmholtz's study. The authors attempted to study this by observing the wave form of the string by use of a digital camera and computer. It was confirmed that the vibration of the string transfers to a triangular wave. The observed waveforms were expanded in Fourier series, and the simulation agreed with the results of the observation. This method is simple and can be utilized teaching material for science.

弓で引いたときのヴァイオリンの弦の振動はヘルムホルツにより、三角波として知られている。実験はヴァイオリンの弦の振動をデジタルカメラで写真撮影して、コンピュータで画像処理を行い、弦の振動が三角波の移動であることを確認した。また、理論的解析により、波形をフーリエ級数に展開して、シミュレーションを行い、弦の振動の観測結果と良く一致した。この方法は簡便であり、理科教材に利用できることを考察した。

1. はじめに

ヴァイオリンの弦の振動の観察にヘルムホルツ (Helmholtz) の研究¹⁾がある。弦に白い点をつけ、その挙動を顕微鏡によって観察した。ただ普通に観察したのではなく、顕微鏡を振動させ、弦の振動数と顕微鏡の振動数を合致させて、そこに現れるリサージュ図形の観察をした。しかし、この方法では弦全体の振動を捉えることができないため、理論的考察から想像するしかなかった。その考察によると、瞬間的な弦全体の形は三角形の2辺、つまり折れ線をしていて、折れ曲がり点は時間とともに回転している。また折れ曲がり点から下ろした垂線は等速に動くというもので

* 前 非常勤講師, 現在 修道高等学校非常勤講師

あった。しかし、本当にそのように動いているかという疑問が残る。ヘルムホルツの研究から120年後、近藤正夫^{2, 3)}はそれを写真で撮って実際に観察した。近藤は新物理の散歩道の「心眼を肉眼に」⁴⁾の中でその方法は、光学レンズを2枚使った異方倍率カメラ（縦横の倍率を変える）を自作し、縦方向が20倍となるようにして、ヴァイオリンを奏でて、カメラでその弦の振動の撮影に成功した。その研究には約10年の歳月を要した。

最近に発達したデジカメとコンピューターを駆使して、これらの撮影が手軽にできないかを考え、ヴァイオリンの弦の振動の撮影を試みた。

弦の振動の概要

ヴァイオリンの弦の振動は stick and slip（ひつつき-すべり）現象によるものである。つまり弓に引かれた弦がある臨界まで引っ張られ、臨界になると滑り、また摩擦により弓に引かれるという現象である（図1参照）。弦の挙動を時間経過と共に説明する。弓を下方向にひくとある限界まで引っ張られ、弦は折れ曲がり点をAとする三角形（折れ線）に近い形になる。臨界になると弦は滑り出し、折れ曲がり点がA→B→Cと移動する。折れ曲がり点がCになると滑りは弱まり、再び摩擦が起こる。弦は下に引っ張られ、折れ曲がり点はC→D→Aと移動する。折れ曲がり点がAに戻るとまた弦は滑り出す。この繰り返により、折れ曲がり点がA→B→C→D→Aと反時計回りに回転している。これは弓の直線運動が折れ曲がり点の回転運動に変換していると考えられ、直流が交流に変わる変換とよく似ている。

我々が目で見ているヴァイオリンの弦の動きは折れ線の包絡線であるから、弦を弾いたときの振動と同様に感じられる。

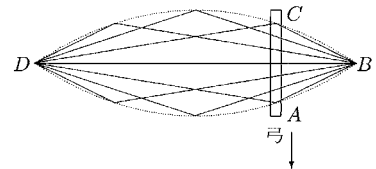


図1

2. 実験概要

研究目的

本研究の第1の目的は近藤の研究を短時間に再現することである。ネガを用いるカメラでは画像を確認するのに数時間かかるため、すぐに画像が見れるデジカメを用いる。光学レンズの作成は技術的に大変難しいため、画像をパソコンのソフトで変形する（以下、変形とは縦横比を変えることを意味する）こととした。すなわち、ヘルムホルツ波を簡単かつ短時間で再確認することである。第2の目的は弦の変位を理論的考察からシミュレーションすることである。

実験機器

デジタルカメラ（OLYMPUS C5050Z）

ライト2台

カメラを固定する台（三脚）

ヴァイオリンと弓（松脂も含む）

白い紙（A4用紙）1枚

画像の概要

幅2560ピクセル 高さ1920ピクセル

露出時間 1 / 1000秒 フラッシュ

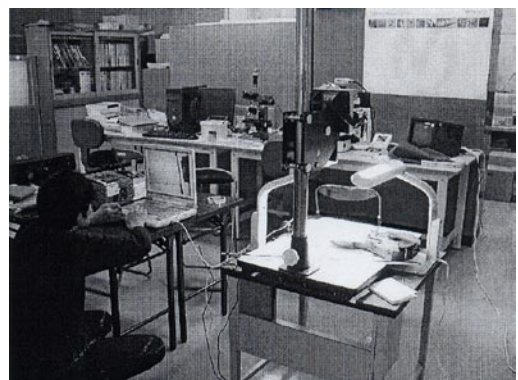


図2 実験風景

実験内容

- ① カメラを三脚に固定，G弦（最も低音）が中央となるようにヴァイオリンを設置
- ② ストロボを用いて撮影
- ③ 画像をパソコンに転送
- ④ 画像をソフトで変形し，中心部分のみ取り出す
- ⑤ G弦を観察する

この手順で実験を行い，連写ではなく1回で1枚のみ撮影した。G弦を観察した理由はヴァイオリンの弦の中で最も低音（196Hz）で，また弦が太いため，撮影時のブレが少なく挙動が捉えやすいと考えた。

画像の変形

まず幅2560ピクセル，高さ1920ピクセルの画像を，幅40%高さ500%（縦に12.5倍）に変形する。さらに中央の正方形，幅1024ピクセル，高さ1024ピクセルの部分を取り出して観察を行う。例えば図3を図4のように変形する操作である。³⁾

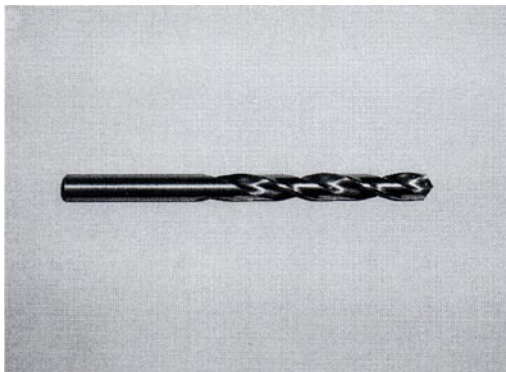


図3

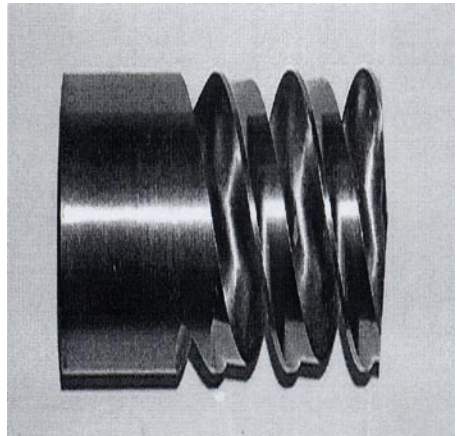


図4 図3を縦方向に12.5倍した画像

実際のヴァイオリンにおいては次のような変形になる。

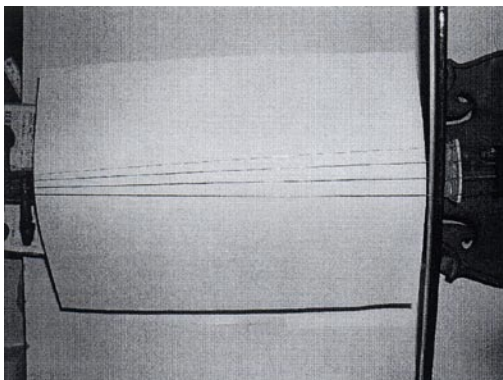


図5

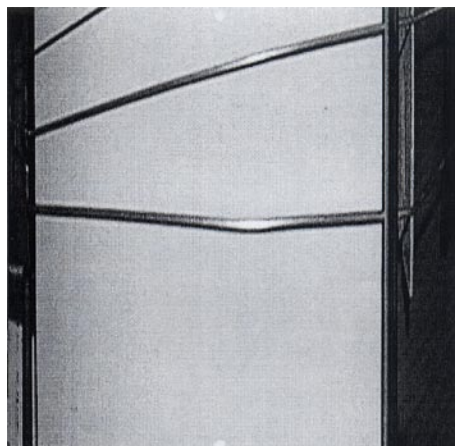


図6 図5を縦方向に12.5倍した画像

この処理を施すことにより, 図5では確認できない折れ曲がり点が図6では明瞭に捉えることができる。

3. 実験結果

以下の6枚のように, 三角形の形のまま変化している様子がうかがえる。弓が一番下の弦(G弦)を上から下に引いたときのものである。

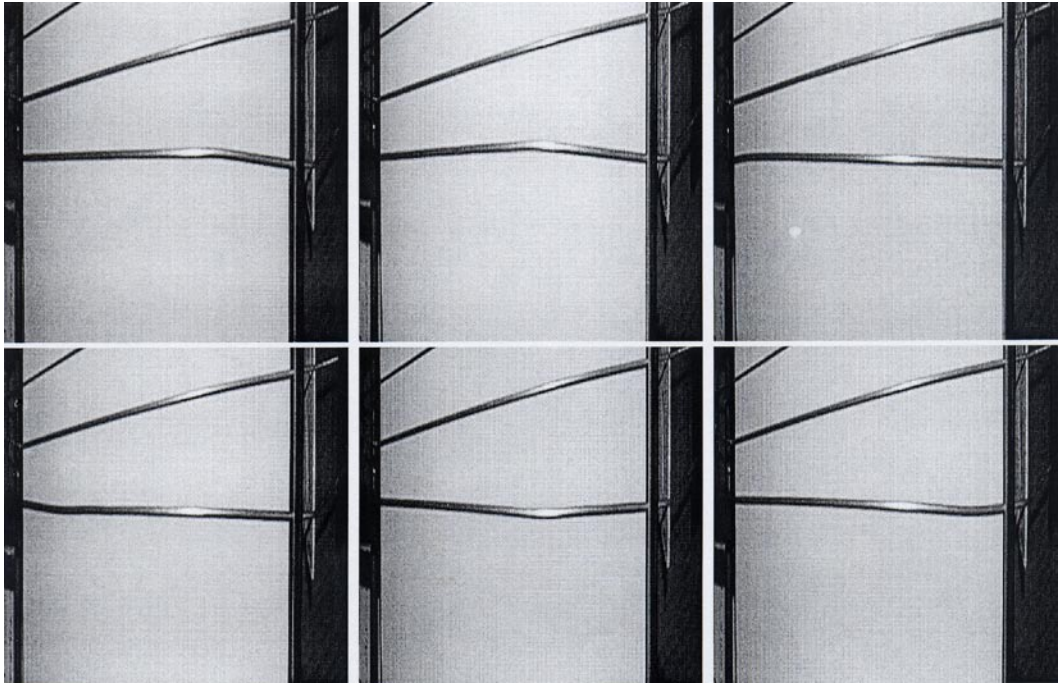


図7

また比較のため, 弦の中央部分を指で弾いたときも撮影した。その一例を図8に示す。ただし, 図7と図8は撮影日時や画像のサイズなどが異なっている。

以上のように, 指で弦を弾いたときと弓で引いたときの弦の様子は全く異なる挙動であり, 弓で引いた弦は折れ線状になることがわかった。また, 撮影時間も短時間で, 比較的容易にヘルムホルツ波を撮影できることがわかった。理科教材として十分に扱えることが確認できた。

4. 理論的考察

図9のような長さ L の弦を考え, 折れ曲がり点は反時計回りに回転しているものとする。過去の実験結果から折れ曲がり点の水平方向の運動は等速であり, 包路線は放物線になることが知られている。その水平方向の速度を a とすると, 1周期は $2L/a$ 秒である。また最大振幅を S とすると原点を出発した折れ曲がり点 $(x(t), y(t))$ の運動は

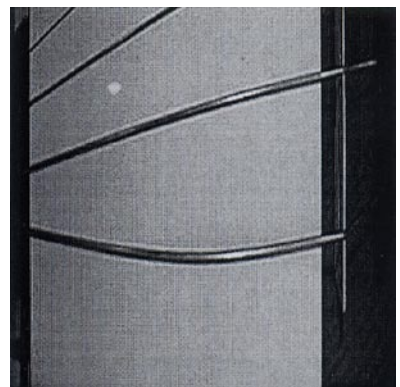


図8 指で弦を弾いたとき

$0 \leq t < \frac{L}{a}$ のとき

$$x(t) = at, \quad y(t) = \frac{4S}{L^2} at(L-at)$$

$\frac{L}{a} \leq t < \frac{2L}{a}$ のとき

$$x(t) = 2L - at, \quad y(t) = -\frac{4S}{L^2} (2L - at)(L - at)$$

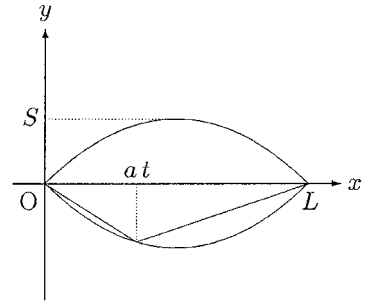


図9

のようなパラメータ表示で表すことができる。⁵⁾ ただし1周期のみを表している。このことから弦の振動の変位を $f(x, t)$ とすると

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = -\frac{4S}{L^2} a(x-L) \dots\dots\dots (1)$$

と考えてよい。

一般に $x = 0$ から $x = L$ に張られた弦の振動の変位は

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(n\omega t + a_n) \dots\dots\dots (2)$$

で表される。今考えている弦において、(1)より

$$f(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} f(x, 0) = -\frac{4S}{L^2} a(x-L)$$

という初期条件を考えると $a_n = \frac{\pi}{2}$ である。また、 $\omega = \frac{\pi a}{L}$ であるから

$$f(x, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8S}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \dots\dots\dots (3)$$

となる。この式において $n = 100$ までをシミュレーションしたものが図10である。

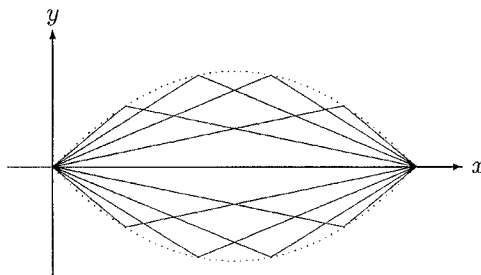


図10 $n = 100$ までのシミュレーション結果

これは実験結果をよく再現している。また、フーリエ級数展開において $n = 1, 2, 30$ までのシミュレーションが図11である。ただし、見易くするため、 y 軸方向に拡大してある。 n の値を大きくすると、三角波に近づくことが確認できた。

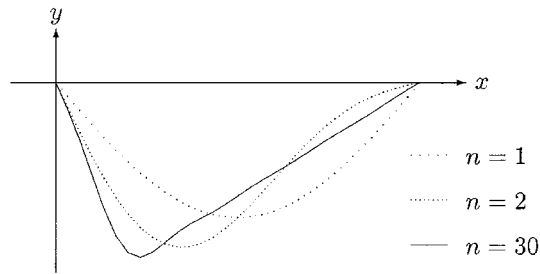


図11

5. 理科教育への応用

ギターなどの弦の振動はいわゆる正弦曲線である。ヴァイオリンの弦の振動も同様に正弦曲線であるように感じられるが、実は全く異なった挙動である。このような予想外の結果は大変興味深く、実際に観察して理科教材としての有用性がかなり期待できる。最近のデジタルカメラ及びコンピュータの発達により、簡便にこれらの振動が観測できないかと考えて、実験を行った。結果は簡便にして身近な機器で観測できることがわかった。これは理科教材として利用でき、また、振動のシミュレーションは Excel 等の計算ソフトでグラフ化できることもわかった。

6. 謝 辞

今回の実験において、広島国際学院大学工学部バイオリサイクル学科の森岡組果さんに協力して頂き、感謝します。

参 考 文 献

- 1) Helmholtz, H.L.F. (1877) : "On the Sensations of Tone," 4th ed., trans. A.J. Ellis (Dover, New York, 1954).
- 2) 近藤正夫, 久保田秀美: 弓で引いた弦の振動, 数理科学 No.148 Oct. (1975) 56-64.
- 3) 近藤正夫: バイオリンはどんな振動をしているか, 計測と制御 Vol.21 No.1 (1982) 21-26.
- 4) ロゲルギスト: 新物理の散歩道 第5集, P162-172 中央公論社 (1983).
- 5) 吉岡大二郎: 振動と波動, 東京大学出版会 (2005).