PC クラスタ環境での並列シミュレーティッド アニーリング法による基板設計問題の計算

中 川 歩*，趙 悦

（平成19年９月20日受理）

A Computation Issue in Circuit Board Design Using Distributed Simulated Annealing with PC Cluster

Ayumi NAKAGAWA and Yue ZHAO
(Received September 20, 2007)

In this paper, we discuss the application of the distributed simulated annealing(DSA) to the graph partition problem and the wiring problem which occurred in the process of circuit board design. DSA is a parallel algorithm that needs a shorter computation time than using the traditional simulated annealing algorithm. We carried out the experiment in the environment of PC cluster using DSA. Through comparing the solutions and the computation time with some of the results based on the traditional simulated annealing algorithm, it was confirmed that DSA is more effective.

Keyword：Simulated Annealing, Distributed Simulated Annealing, Circuit Board Design, Wiring problem, PC cluster

基板設計の工程の中には次の３つのステップがある。一つは部品を複数の基板に分割して配置する分割問題があり，二つ目に基板のどの部分に部品を置くかを決める配置問題又はフロアプラン問題がある。そして三つ目に，部品間の配線を決定する配線問題がある。これら三つのステップは組み合わせ最適化問題となり，NP－完全問題に分類される。本論文では，シミュレーティッドアニーリング法（SA 法）を並列計算に適応させた分散シミュレーティッドアニーリング法（DSA 法）を PC クラスタ上で基板設計工程で生じる上述の一つ目の分割問題と三つ目の配線問題に適応させて実験をし，基板設計時における分散シミュレーティッドアニーリング法の活用を模索した。SA 法と比較することによって，分散シミュレーテッドアニーリング法の有効性を実証した。

* 広島国際学院大学大学院工学研究科 修士課程

1．はじめに

シミュレーティッドアニーリング法（SA 法：Simulated Annealing）は大規模な組み合わせ最適化問題に対して有効な発見的手法である[1]。分散シミュレーティッドアニーリング法（DSA 法：Distributed Simulated Annealing）は SA 法に使われていた metropolis 法にかわり部分同期空間過程を利用して並列計算を行う手法である[2] [3]。我々は DSA 法が活用できる問題を模索し，VLSI 等の基板設計に DSA 法が応用できるのではないかと着目した。基板設計の工程の中には重要なステップが３つある。一つ目は多層プリント基板設計などで，部品を複数の基板に分割して配置する分割問題ある。二つ目に基板のどの部分に部品を置くかを決める配置問題又はフロアプラン問題がある。そして三つ目に，部品間の配線を決定する配線問題がある。これら三つのステップは組み合わせ最適化問題となり，NP－完全問題に分類される。本論文では基板設計において発生する分割問題と配線問題について定式化により DSA 法を応用して並列計算が可能であることを示し，実際に実験を行ったデータからその有効性を実証した。実験では分割問題と配線問題を DSA 法と SA 法に適応させて実験をした。

2．SA 法と DSA 法の概略

SA法[1]とDSA法[3]のアルゴリズムの概略について説明する。

SA 法のアルゴリズム

ステップ１

目的関数 $f=f(\mathrm{x})$ を最小にするために変数集合 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ が与えられた問題に初期化を行い，各変数にランダム的に初期値を与え初期解を生成する。温度パラメータ T の初期値を $T_0=T_{initial}$ に設定する。$\boldsymbol{t}=0$，$\boldsymbol{k}=0$

ステップ２

変数集合からランダム的に変数 $\boldsymbol{x}_j$ を選んでステップ３を実行する。

ステップ３

現時点での変数 $\boldsymbol{x}_j$ の状態から次の状態に遷移させる。遷移後の解が遷移前より良い解となっていれば変数 $\boldsymbol{x}_j$ の状態を遷移する。悪くなっていれば Metropolis 法による判定を行い遷移を決める。つまり，exp［$-\Delta f/T_k$］の確率で遷移する。ここで Δf は関数の増加分である。

ステップ４

$t < t_{end}$ であれば，$\mathrm{t}=\mathrm{t}+1$，ステップ２から繰り返す。そうでなければステップ５に進む。

ステップ５

$T_k > T_{end}$ であれば，アルゴリズムが終わる。そうでなければ $T_{k+1}=\mu T_k$；$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}+1$；$\boldsymbol{t}=0$；ステップ２から繰り返す。ここで μ は温度の下げ率で，（$0<\mu<1$）である。

DSA 法のアルゴリズム

ステップ１

目的関数 $f=f(\mathrm{x})$ を最小にするために変数集合 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ が与えられた問題に初期化を行い，各変数にランダム的に初期値を与え初期解を生成する。温度パラメータ T の初期値を $T_0=T_{initial}$ に設定する。変数集合を適当に M 個の部分集合 A^1，A^2，$\cdots$，A^M に分割する。$\boldsymbol{t}=0$，$\boldsymbol{k}=0$

ステップ２

各変数にランダム的に初期値を与え初期解を生成する。温度パラメータ T の初期値を $T_0 = T_{initial}$ に設定する。$t=0$，$k=0$。

ステップ３

部分集合 A^1，A^2，…，A^M からランダム的に A^α を選んで，A^α に属する全ての変数に対して同時に（同期的に）ステップ４を実行する。

ステップ４

次の確率で変数 x_j の状態を y_j $(y_j \in X_j)$ に遷移させる。

$$P(y_j \mid x) = \frac{1}{Z}\exp\left\{\frac{1}{2T}\left(f(x) - f(T_j^{y_j}x)\right)\right\} \tag{1}$$

ここで

$$Z = \sum_{m \in X_j}\exp\left\{\frac{1}{2T}\left(f(x) - f(T_j^{m}x)\right)\right\} \tag{2}$$

ここで X_j は変数 x_j の状態の集合であり，$T_j^{y_j}x$ は変数 x_j の状態を y_j にし，それ以外の変数を変えない演算である。

ステップ５

$t < t_{end}$ であれば，t = t +1，ステップ３から繰り返す。そうでなければステップ６に進む。

ステップ６

$T_k > T_{end}$ であれば，アルゴリズムが終わる。そうでなければ $T_{k+1} = \mu T_k$；$k=k+1$；$t=0$；ステップ３から繰り返す。ここで μ は温度の下げ率で，$(0<\mu<1)$ である。

３．分割問題と配線問題

本論文では分割問題をグラフ分割問題（GPP：Graph Partition Problem）に応用して実験を行った。分割問題は以下のように表現される。

$$G = (U, V),\ U = \{n_j ; j = 1, 2, \cdots, N\},\ V = \{e_{ij} ; n_i \in U,\ n_j \in U,\ i \neq j\}$$

ここで U がノードの集合（部品集合），V が枝の集合（配線集合）である。ここで部品集合を M 個の基板に分割する問題を考える。評価基準としては

① 基板間にまたがる配線の総数を最小にする。

② 基板の部品の数をなるべく均一にする。

部品 i の状態を x_i で表す。即ち $x_i = m$ は，部品 i が基板 m に割り当てられることを意味する。

基準①に対して関数

$$\phi(x) = \phi(x_i, x_j) = \begin{cases} 0 & if \quad x_i = x_j \\ \omega_{ij} & otherwise \end{cases} \tag{3}$$

を導入する。ω_{ij} は部品 n_i と n_j 間の配線の重みである。部品 n_i と n_j 間の配線がない場合は $\omega_{ij}=0$ とし，それ以外は１とする。これにより基準①は次の式で表すことができる。

$$\sum_{i,j}\phi(x_i, x_j) \longrightarrow \min \tag{4}$$

基準②に対して次の関数を導入する。

$$\xi(x, y) = \begin{cases} 0 & if \quad x \neq y \\ 1 & otherwise \end{cases} \tag{5}$$

これにより基準②は次の式で表すことができる。

$$\sum_{m=1}^{M} \left[\sum_{i} \xi(x_i, m) \right]^2 \longrightarrow \min \tag{6}$$

これを次のように変形する。

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M} \left[\sum_{i} \xi(x_i, m) \right]^2 &= \sum_{m} \left[\sum_{i} \xi(x_i, m)^2 + 2 \sum_{i<j} \xi(x_i, m) \xi(x_j, m) \right] \\ &= \sum_{i} \sum_{m} \xi(x_i, m)^2 + 2 \sum_{i<j} \sum_{m} \xi(x_i, m) \xi(x_j, m) \\ &= N + 2 \sum_{i<j} \xi(x_i, x_j) \end{aligned} \tag{7}$$

従って分割問題の目的関数は次の式となる。ここでλは制約条件の強さを表す係数であり，本論文の実験では0.5に設定してある。

$$f(x) = \sum_{i, j} \phi(x_i, x_j) + 2\lambda \sum_{i, j} \xi(x_i, x_j) \tag{8}$$

これは文献[3]で示されている条件を満たしている目的関数であり，DSA 法による並列計算が可能である。

本論文で扱う配線問題は平面上に与えられた端子間を接続する経路を求める問題である。
前提条件として，

① 長方形区域の格子状の接点に部品が置かれ，配線は格子状グラフの枝に沿って行われる。
② 配線の始点は，必ず終点よりグラフの左側にある。
③ 配線は必ず遠回りをせず最短経路をとる。
④ 枝上の配線経路の重なりを許す。

評価基準は，基板上の各枝の配線経路の重なりをなるべく均等にするとした。
本論文の配線問題の目的関数は次の式となる。

L：配線数　　B：格子の長さ

決定変数：配線　$x \mid x_k$　k番目のネットの配線の経路

$$f(x) = f(E(x)) = \sum_{i=1}^{U} \sum_{j=1}^{U} \begin{cases} \{E_{ij}(x)\}^2 & if \quad i \text{ と } j \text{ のどちらかが奇数である。} \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{9}$$

ここで，U＝B＋（B－１）：一時的な配列の利用サイズである。

$$E_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{L} \phi_{ij}(x_k) \tag{10}$$

$$\phi_{ij}(x_k) \begin{cases} 1 & if \; x_k \text{ が枝 }_{ij} \text{ を通る} \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{11}$$

この目的関数を展開すれば文献[3]で示されている条件を満たしている目的関数になり，DSA 法による並列計算が可能である。

4．実験結果

4.1.1　実験環境

本論文では，DSA 法と SA 法を用いて分割問題と配線問題について実験を行った。実験環境として，８台構成の PC クラスタと MPI（Message Passing Interface）を用いた並列計算システムを使用した。

4.1.2　分割問題

グラフ分割問題はノード数2048個，分割数８，ランダムに１ノード当たり平均３本の枝が発生する。また１ノード当たり平均10回の計算がされる反復回数とした。

SA のパラメータは以下のように設定した。初期温度10，終了温度0.001，温度下げ率 μ は0.9である DSA 法について１，２，４，８台で分割問題の計算をそれぞれ10回行い，結果の平均値を逐次改善法と SA 法と比較して評価する。図１は，逐次改善法，SA 法，DSA 法１，２，４，８台の実験結果の最終値と計算時間の平均をグラフにしたものである。

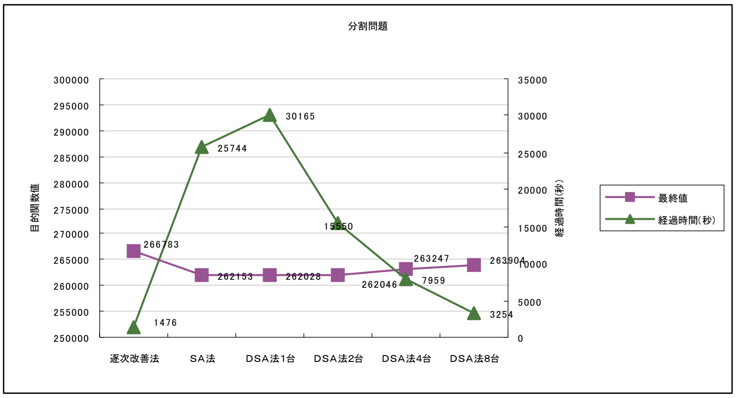

図１　SA 法と DSA 法の分割問題の比較

表１は10回行った分割問題の実験のうち，逐次改善法と SA 法，DSA 法１台と８台の一つを表にまとめたものである。初期状態は全ての部品が一つの基板に置かれている状態である。基板間配線数とは，その基板から他の基板に伸びる配線の総数である。基板内部品数とは，その基板に置かれている部品の総数である。

表１　分割問題の基板間配線数と基板内部品数

	基板番号	1	2	3	4	5	6	7	8	目的関数値
初 期 状 態	基板間配線数	0	0	0	0	0	0	0	0	2096128
	基板内部品数	2048	0	0	0	0	0	0	0	
逐 次 改 善 法	基板間配線数	2190	2180	2321	2452	2364	2226	2338	2257	267813
	基板内部品数	256	256	256	257	255	256	256	256	
S　A　法	基板間配線数	692	678	701	661	698	685	623	652	262659
	基板内部品数	256	256	256	256	256	256	256	256	
DSA 法１台	基板間配線数	685	637	682	649	641	710	681	717	262038
	基板内部品数	256	256	256	256	256	256	256	256	
DSA 法８台	基板間配線数	609	717	741	611	679	664	753	670	263626
	基板内部品数	263	256	253	255	252	257	253	259	

4.1.3　配線問題

配線数は4096本，基板となるグラフの格子の長さは８とした。反復回数については１ノード当たり平均10回の計算が行われる回数とした。初期温度100，終了温度５，温度下げ率μは0.9であるDSA 法について，１，２，４，８台で配線問題の計算をそれぞれ10回行い，結果の平均値を逐次改善法と SA 法と評価する。図２は，逐次改善法，SA 法，DSA 法１，２，４，８台の実験結果の最終値と計算時間の平均をグラフにしたものである。

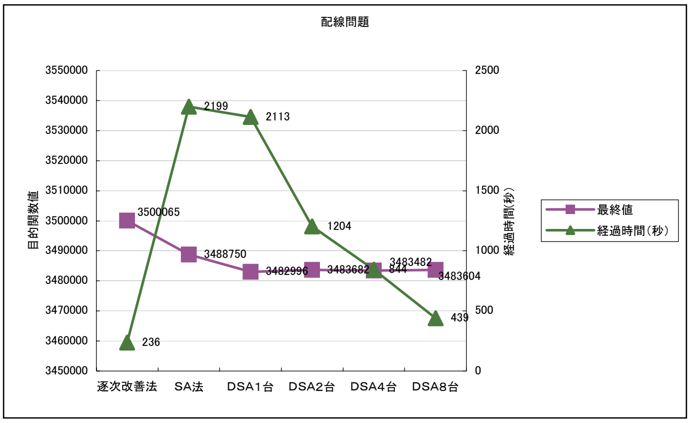

図２　SA 法と DSA 法の配線問題の比較

図３は10回行った配線問題の実験の一つの初期状態と８台での並列計算後の状態を格子状グラフに可視化した図である。格子状グラフは基板を表す。点を結ぶ線は配線可能な基板上の枝を表し，枝上の数値はその枝を通る配線の数を表している。

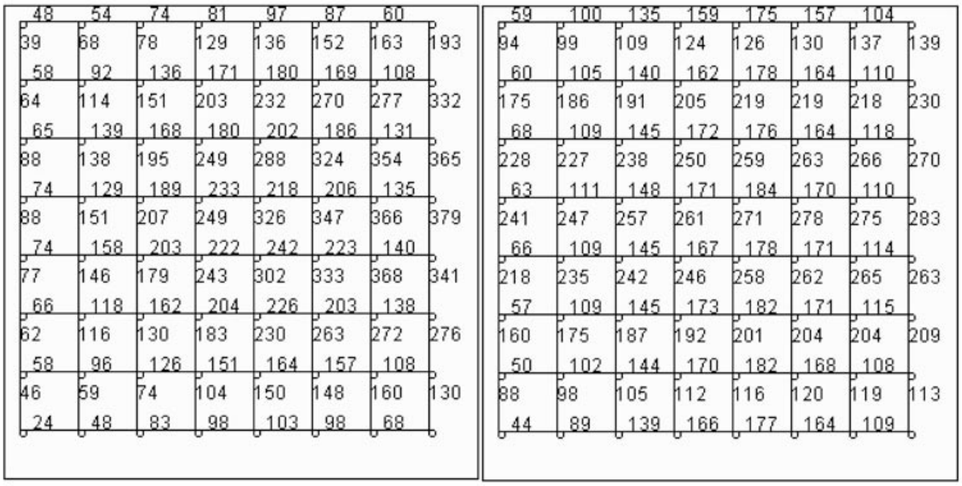

図３　配線問題の初期状態（左）と８台での並列計算後の状態（右）

５．考　　察

分割問題の実験結果から DSA 法では台数増加とともにほぼ台数分の計算時間短縮が確認された。図１より，並列計算に要した時間は，DSA 法１台と比較して２台の場合は約1/2に，４台の場合は約1/4に，そして８台は約1/8に短縮されている。解の品質については，図１に DSA 法８台での目的関数値の最終値は若干上がる傾向も見られるが基本的に高い品質が保たれている。また，表

１の分割結果からも良い分割に収束されていくことが確認できる。

配線問題の実験結果から，計算時間短縮の面では台数分にはならないが短縮されていることが確認できた。図２より，並列計算に要した時間は，DSA法１台と比較して２台の場合は約3/5に，４台の場合は約2/5に，そして８台は約1/5に短縮されている。計算時間が台数分の短縮となっていない原因として，MPI通信に時間がかかることが挙げられる。配線問題について，興味深いのはDSAでは常に従来のSAよりも目的関数値が良いところに収束している点である。これは，DSAには局所最小点から脱出する力が強いからであると推測できる。DSAによる結果を配線の状態から観察してみよ。図３より，配線が300本以上通る枝が並列計算後に300本未満の配線となっている。また，配線が50本未満通る枝が並列計算後にほぼ50本以上の配線になっていることから，配線の重なりが他の枝と比較して極端に高い枝の重なりが減少され，配線の重なりが他の枝と比較して少ない枝は重なりが増加していることがわかる。このことから基板上の各枝の配線の重なりを均等にする評価基準を計算結果に反映する為に，配線を決める際にできるだけ配線数の少ない配線可能な枝を通る経路を選択しようとすることがわかる。配線問題についてもDSA法による並列計算法がSA法よりも有効である。しかし，DSAは格子の長さが大きくなると配線の組み合わせ数が指数関数的に増えてしまい，確率を求める段階で桁あふれを起こし大規模な問題に不向きであることも実験で分かった。

６．おわりに

本論文では，基板設計時に発生する分割問題と配線問題についてSA法よりもDSA法が有効であることを実験で実証した。分割問題ではDSA法によってSA法と同程度に基板間の配線を少なくし各基板内の部品数を均一にしながら，並列計算によって大幅な計算時間の短縮に成功した。配線問題ではDSA法はSA法より基板内の部品の配線の重なりを均一にする事ができた。さらに並列計算によって大幅な時間の短縮にも成功した。

今後の課題としては，さらに大規模なPCクラスタでの並列計算の実験や温度や反復回数等のパラメータ設定などのアルゴリズムの改善，ほかの大規模組み合わさせ最適化問題へのDSAの応用が挙げられる。

参　考　文　献

１．S. KIRKPATRICK, C.D. GELATT, JR., M.P. VERCCHI："Optimization by Simulated Annealing", Science, Vol. 220, pp.671-680, 1983

２．Y. ZHAO, T. FUKAO, M. SHIMURA：Parallel Computing of Simulated Annealing Algorithm of Some Combinatoial Optimitimization Problems. 電子通信学会論文誌, Vol. E70, No.9, pp.798-800（1987）

３．Y. ZHAO, T. FUKAO：Distributed Computing of a Stochastic Algorithm of Combinatorial Optimization Problems. SYSTEM MODELLING AND OPTIMIZATION Springger-Verlag Lecture Notes in Control and Information Sciences Vol.113 ppp. 318-327（1989）

４．趙，何：組み合わせ最適化問題の分散シミュレーテッド・アニーリング法　広島電機大学研究報告，第29巻, pp.57-63（1996）