広島経済大学経済研究論集
第35巻第２号　2012年９月

最適制御問題における保存則の新しい導出法
――拘束条件つき極値問題の一般化――

三　　村　　文　　武*

は　じ　め　に

1970年，サミュエルソン[1]は保存則を初めて理論経済学に明示的に導入し「運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は一定である」という力学的エネルギー保存則との類似に注目し，すべての産出物がシステムの成長のための資本形成に供されるような新古典派的フォン・ノイマン型経済成長モデルにおいて「総産出-総資本比は一定である」という保存則を導出した。又，濃野[2]はリーの理論[3]の理論経済学への応用を提唱し，その例証として生産関数のリー変換群の下での対称性（不変性）に基づいて，中立型技術変化の完全なリストを完成させた。

古典力学においては，リー変換群の下での作用積分の対称性（不変性）に基づくネータの定理[4]および発散項を伴うその一般化[5]は，ラグランジュ（又はハミルトン）構造から保存則を発見する上で重要な役割を果たしてきた。一方，カビグリア[6, 7]は新たな変数を付加した高次元の空間での変分原理を利用して，ラグランジュ（又はハミルトン）構造を用いない保存則の新しい導出法を見出した。その後，三村-濃野[8]はネ―ターよりもより一般的であるこのカビグリアの手法を更に考察・発展させ，与えられた力学系の保存則を導出する効果的な手法として確立し，動力学および経済動学の種々のモデルにおける保存則の導出とそれらのモデルの動学的性質の解明に応用した。我々は前稿でその手法を特に新古典派的経済成長理論への応用[9]，枯渇性資源を含む最適資産蓄積問題への応用[10]，Open-loop ナッシュ戦略における公共財の自発的供給問題の分析への応用[11]および二種の資本（物的資本と人的資本）を持つ経済成長モデル[12]への応用について紹介した。本稿では最大化を図る目的関数が状態変数の微分を変数として持つような経済モデルへの応用のために，拘束条件の下での極値問題における保存則の新しい導出法の更なる一般化を考察する。

本稿を通して各項の繰り返し現れる同じ添字については総和をとるという和の規約を採用し，関数は必要な階まで微分可能とする。

1.　最適制御問題における保存量

先ず最適制御問題の一般化のルーツとなる保存量構成法のレビューから始める。変数 $q=(q^{\alpha}(t))$，$\dot{q}=(\dot{q}^{\alpha}(t))=(dq^{\alpha}/dt)$，$\ddot{q}=(\ddot{q}^{\alpha}(t))=(d^2q^{\alpha}/dt^2)$ $(\alpha=1,\cdots,\lambda)$ をもつラグランジアン $L(\dot{q},q,t)$ に関するオイラー - ラグランジュ方程式系（E-L 方程式系）：

$$(1)\qquad [L]_{\alpha}\equiv\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^{\alpha}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}}=0$$

（d/dt は t についてのトータル微分），即ち

$$\ddot{q}^{\beta}\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^{\alpha}\partial\dot{q}^{\beta}}+\dot{q}^{\beta}\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^{\alpha}\partial q^{\beta}}+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^{\alpha}\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}}=0$$

の解上で

---

* 広島経済大学経済学部教授
（Received, June 13, 2012）

(2) $$\frac{d\Omega(\dot{q},q,t)}{dt}=0$$

を満たす Ω を（1）の保存量，（2）を保存則と呼ぶ。先ず次の定理を挙げる[13)]：

定理１．オイラー・ラグランジュ方程式系（1）の解上で

(3) $$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^\alpha\partial\dot{q}^\beta}\dfrac{d\xi^\beta}{dt}+\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^\alpha\partial q^\beta}\xi^\beta\right) \\ -\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^\beta\partial q^\alpha}\dfrac{d\xi^\beta}{dt}+\dfrac{\partial^2 L}{\partial q^\alpha\partial q^\beta}\xi^\beta\right)=0 \end{cases}$$

を満たす解の組 $\xi_\delta^\alpha(\dot{q},q,t)$ $(\alpha=1,\cdots,\ell;\delta=1,2)$ により E-L 方程式系（1）の保存量が次のように構成される：

(4) $$\begin{cases} \Omega=\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^\alpha\partial\dot{q}^\beta}\left(\xi_1^\alpha\dfrac{d\xi_2^\beta}{dt}-\xi_2^\beta\dfrac{d\xi_1^\alpha}{dt}\right) \\ \qquad+\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^\alpha\partial q^\beta}-\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^\beta\partial q^\alpha}\right)\xi_1^\alpha\xi_2^\beta \end{cases}$$

この定理 1 を有限 $[0,T]$ $(T<\infty)$ 又は無限 $[0,T)$ $(T=\infty)$ の時間区間における積分

(5) $$\int_0^T e^{-\rho t}U(\dot{q},q)dt \quad (\rho\text{: const.})$$

の拘束条件

(6) $$G^a=G^a(\dot{q},q)=0 \quad (a=1,\cdots,m)$$

の下での極値問題に適用する。但し $q=(q^i(t))$，$\dot{q}=(\dot{q}^i(t))$ $(i=1,\cdots,n)$ とする。この極値問題におけるラグランジアンは，$\pi=(\pi_a(t))$ をラグランジュ乗数として

$$L(\dot{q},\dot{\pi},q,\pi,t)=e^{-\rho t}U(\dot{q},q)+\pi_a G^a(\dot{q},q)$$

で与えられる。ここで $\pi_a=q^{n+a}$，即ち $(q^\alpha)=(q^i,\pi_a)$ $(\alpha=1,\cdots,\lambda=n+m)$ と置くと，E-L 方程式系（1）は $n+1\leq\alpha\leq n+m$ のとき拘束条件（6），$1\leq\alpha\leq n$ のとき $[L]_i\equiv(d/dt)(\partial L/\partial\dot{q}^i)-\partial L/\partial q^i=0$ となる。又（3）は $n+1\leq\alpha\leq n+m$ のとき次の（9a），$1\leq\alpha\leq n$ のとき（9b）となる。従ってこの極値問題から生成される E-L 方程式系の保存量は（4）を書き換えて次のように構成される[14)]：

定理２．積分（5）の拘束条件（6）の下での極値問題において，最適経路上，即ち極値問題より生成される E-L 方程式系の解上で

(7a) $$\frac{\partial G^a}{\partial\dot{q}^i}\frac{d\xi^i}{dt}+\frac{\partial G^a}{\partial q^i}\xi^i=0$$

(7b) $$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}\dfrac{d\xi^j}{dt}+\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial q^j}\xi^j\right. \\ \qquad\left.+\dfrac{\partial F^a}{\partial\dot{q}^i}\eta_a\right)-\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^j\partial q^i}\dfrac{d\xi^j}{dt}\right. \\ \qquad\left.+\dfrac{\partial^2 L}{\partial q^i\partial q^j}\xi^j+\dfrac{\partial G^a}{\partial q^i}\eta_a\right)=0 \end{cases}$$

を満たす解の組 $\xi_\delta^i(\dot{q},\dot{\pi},q,\pi,t)$ と $\eta_a^\delta(\dot{q},\dot{\pi},q,\pi,t)$ $(a=1,\cdots,m;\ i=1,\cdots,n;\ \delta=1,2)$ により，次の保存量が構成される：

(8) $$\begin{cases} \Omega=\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^\alpha\partial\dot{q}^\beta}\left(\xi_1^i\dfrac{d\xi_2^j}{dt}-\xi_2^j\dfrac{d\xi_1^i}{dt}\right) \\ \qquad+\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial q^j}(\xi_1^i\xi_2^j-\xi_2^i\xi_1^j) \\ \qquad+\dfrac{\partial G^a}{\partial\dot{q}^i}(\xi_1^i\eta_a^2-\xi_2^i\eta_a^1) \end{cases}$$

式（7a）と（7b）を満たす解として $(\xi^i,\eta_a)=(\dot{q}^i,\dot{\pi}_a+\rho\pi_a)$ が得られる。実際，$G^a=0$ のとき

$$\frac{dG^a}{dt}=\ddot{q}^i\frac{\partial G^a}{\partial\dot{q}^i}+\dot{q}^i\frac{\partial G^a}{\partial q^i}=0$$

であり $(\xi^i)=(\dot{q}^i)$ は（7a）を満たす。また（7b）の左辺は (ξ_1^i,η_a^1) を $(\dot{q}^i,\dot{\pi}_a+\rho\pi_a)$ に置き換えた後，d/dt の括弧の中の項を

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)+\rho\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \\ \quad =\ddot{q}^j\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}+\dot{q}^j\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \\ \quad +(\dot{\pi}_a+\rho\pi_a)\dfrac{\partial G^a}{\partial \dot{q}^i} \end{cases}$$

を用い，次の括弧の中の項を

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial q^i}\right)+\rho\dfrac{\partial L}{\partial q^i} \\ \quad =\ddot{q}^j\dfrac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j}+\dot{q}^j\dfrac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial q^j} \\ \quad +(\dot{\pi}_a+\rho\pi_a)\dfrac{\partial G^a}{\partial q^i} \end{cases}$$

を用いて書き換えると $d[L]_i/dt+\rho[L]_i$ となる。従って $[L]_i=0$ のとき $(\xi^i,\eta_a)=(\dot{q}^i,\dot{\pi}_a+\rho\pi_a)$ は（7b）を満たす。この解を定理 2 の解の組の一方 $(\xi_1^i,\eta_a^1)=(\xi^i,\eta_a)$ に選び他方を $(\xi_2^i,\eta_a^2)=(\xi^i,\eta_a)$ とおくと保存量（8）は次のようになる：

$$\begin{cases} \Omega=\dot{q}^i\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\dfrac{d\xi^j}{dt}+\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\xi^j\right. \\ \quad \left.+\dfrac{\partial G^a}{\partial \dot{q}^i}\eta_a\right)-\left(\ddot{q}^j\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right. \\ \quad \left.+\dot{q}^j\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}+(\dot{\lambda}_a+\rho\lambda_a)\dfrac{\partial G^a}{\partial \dot{q}^i}\right)\xi^i \end{cases}$$

この式の ξ^i の項は（9）と $[L]_i=0$ により $(\rho\partial L/\partial \dot{q}^i+\partial L/\partial q^i)\xi^i$ と書き換えられ，次の定理が得られる[15)]：

定理 3．積分（5）の拘束条件（6）の下での極値問題において，最適経路上，即ち極値問題より生成される E-L 方程式系の解上で（7a）と（7b）を満たす解 $\xi^i(\dot{q},\dot{\pi},q,\pi,t)$ と $\eta_a(\dot{q},\dot{\pi},q,\pi,t)$ $(a=1,\cdots,m;\, i=1,\cdots,n)$ により次の保存量が構成される：

$$(10)\quad \begin{cases} \Omega=\dot{q}^i\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\dfrac{d\xi^j}{dt}+\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\xi^j\right. \\ \quad \left.+\dfrac{\partial G^a}{\partial \dot{q}^i}\eta_a\right)-\left(\rho\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}+\dfrac{\partial L}{\partial q^i}\right)\xi^i \end{cases}$$

2. 最適制御問題の一般化と保存量

注の文献12）における最適制御問題を一般化して，有限 $[0,T]$ $(T<\infty)$ または無限 $[0,T)$ $(T=\infty)$ の時間区間における積分

$$(11)\quad \int_0^T e^{-\rho t}U(\dot{x},x,u)dt$$

の，拘束条件

$$(12)\quad G^\mu(\dot{x},x,u)=0$$

の下での極値問題を考察する。ここに $x=(x^\mu(t))$ $(\mu=1,\cdots,k)$ は状態変数，$\dot{x}^\mu$ はその微分 $\dot{x}^\mu=dx^\mu/dt$，$u=(u^\sigma(t))$ $(\sigma=1,\cdots,\ell)$ は制御変数，ρ $(\rho\geq 0)$ は定数である。この問題のラグランジアンは π_μ をラグランジュ乗数として

$$\begin{cases} L(\dot{x},\dot{u},\dot{\pi},x,u,\pi,t) \\ \quad =e^{-\rho t}U(\dot{x},x,u)+\pi_\mu G^\mu(\dot{x},x,u) \end{cases}$$

で与えられ，その E-L 方程式系は（12）および

$$(13a)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x^\mu}=0: \\ \dfrac{d}{dt}\left(e^{-\rho t}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{x}^\mu}+\pi_\nu\dfrac{\partial G^\nu}{\partial \dot{x}^\mu}\right) \\ \quad =e^{-\rho t}\dfrac{\partial U}{\partial x^\mu}+\pi_\nu\dfrac{\partial G^\nu}{\partial x^\mu} \end{cases}$$

$$(13b)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}^\sigma}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial u^\sigma}=0: \\ e^{-\rho t}\dfrac{\partial U}{\partial u^\sigma}+\pi_\mu\dfrac{\partial G^\mu}{\partial u^\sigma}=0 \end{cases}$$

から成る。この E-L 方程式系の保存量構成のため，定理３において$(q^i)=(x^\mu, u^\sigma)$ $(i=1,\cdots, n=k+\ell)$，$(\xi^i)=(\varphi^\mu, \tau^\sigma)$，$(\eta_a)=(\eta_\mu)$ $(\alpha,\cdots, m=k)$とおくと，(7a) 及び (7b) はそれぞれ次の (14a) 及び (14b, c) となる：

$$\text{(14a)}\quad \frac{\partial G^\kappa}{\partial \dot{x}^\nu}\frac{d\varphi^\nu}{dt}+\frac{\partial G^\kappa}{\partial x^\nu}\varphi^\nu+\frac{\partial G^\kappa}{\partial u^\sigma}\tau^\sigma=0$$

$$\text{(14b)}\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{e^{-\rho t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}^\mu\partial \dot{x}^\nu}\frac{d\varphi^\nu}{dt}\right.\right.\\&\quad\left.+\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}^\mu\partial x^\nu}\varphi^\nu+\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}^\mu\partial u^\sigma}\tau^\sigma\right)\\&\quad+\frac{\partial G^\nu}{\partial \dot{x}^\mu}\eta_\nu+\pi_\kappa\left(\frac{\partial^2 G^\kappa}{\partial \dot{x}^\mu\partial \dot{x}^\nu}\frac{d\varphi^\nu}{dt}\right.\\&\quad\left.\left.+\frac{\partial^2 G^\kappa}{\partial \dot{x}^\mu\partial x^\nu}\varphi^\nu+\frac{\partial^2 G^\kappa}{\partial \dot{x}^\mu\partial u^\sigma}\tau^\sigma\right)\right\}\\&=e^{-\rho t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^\mu\partial \dot{x}^\nu}\frac{d\varphi^\nu}{dt}\right.\\&\quad\left.+\frac{\partial^2 U}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\varphi^\nu+\frac{\partial^2 U}{\partial x^\mu\partial u^\sigma}\tau^\sigma\right)\\&\quad+\frac{\partial G^\nu}{\partial x^\mu}\eta_\nu+\pi_\kappa\left(\frac{\partial^2 G^\kappa}{\partial x^\mu\partial \dot{x}^\nu}\frac{d\varphi^\nu}{dt}\right.\\&\quad\left.+\frac{\partial^2 G^\kappa}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\varphi^\nu+\frac{\partial^2 G^\kappa}{\partial x^\mu\partial u^\sigma}\tau^\sigma\right)\end{aligned}\right.$$

$$\text{(14c)}\left\{\begin{aligned}&e^{-\rho t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial u^\sigma\partial \dot{x}^\nu}\frac{d\varphi^\nu}{dt}\right.\\&\quad\left.+\frac{\partial^2 U}{\partial u^\sigma\partial x^\nu}\varphi^\nu+\frac{\partial^2 U}{\partial u^\sigma\partial u^\omega}\tau^\omega\right)\\&\quad+\frac{\partial G^\mu}{\partial u^\sigma}\eta_\mu+\pi_\kappa\left(\frac{\partial^2 G^\kappa}{\partial u^\sigma\partial \dot{x}^\nu}\frac{d\varphi^\nu}{dt}\right.\\&\quad\left.+\frac{\partial^2 G^\kappa}{\partial u^\sigma\partial x^\nu}\varphi^\nu+\frac{\partial^2 G^\kappa}{\partial u^\sigma\partial u^\kappa}\tau^\kappa\right)=0\end{aligned}\right.$$

又，保存量 (10) は

$$\left\{\begin{aligned}\Omega=\dot{x}^\mu&\left\{e^{-\rho t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}^\mu\partial \dot{x}^\nu}\frac{d\varphi^\nu}{dt}\right.\right.\\&\quad\left.+\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}^\mu\partial x^\nu}\varphi^\nu\right)+\frac{\partial G^\nu}{\partial \dot{x}^\mu}\eta_\nu+\pi_\kappa\times\\&\quad\left.\left(\frac{\partial^2 G^\kappa}{\partial \dot{x}^\mu\partial \dot{x}^\nu}\frac{d\varphi^\nu}{dt}+\frac{\partial^2 G^\kappa}{\partial \dot{x}^\mu\partial x^\nu}\varphi^\nu\right)\right\}\\&-\left\{e^{-\rho t}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \dot{x}^\mu}+\frac{\partial U}{\partial x^\mu}\right)\right.\\&\quad\left.+\pi_\nu\left(\rho\frac{\partial G^\nu}{\partial \dot{x}^\mu}+\frac{\partial G^\nu}{\partial x^\mu}\right)\right\}\varphi^\mu\\&-\left(e^{-\rho t}\frac{\partial U}{\partial u^\sigma}+\pi_\nu\frac{\partial G^\nu}{\partial u^\sigma}\right)\tau^\sigma\end{aligned}\right.$$

となる。この式の τ^σ の括弧の中の項は (13b) により零となることに注意して次の定理が得られる：

定理４．積分 (11) の拘束条件 (12) の下での極値問題において，最適経路上，即ち極値問題より生成される E-L 方程式系の解上で (14a)，(14b)，(14c) を満たす解 $\varphi^\mu(\dot{x},\dot{u},\dot{\pi},x,u,\pi,t)$ と $\tau^\sigma(\dot{x},\dot{u},\dot{\pi},x,u,\pi,t)$，$\eta_\mu(\dot{x},\dot{u},\dot{\pi},x,u,\pi,t)$ $(\mu=1,\cdots,k;\sigma=1,\cdots,\ell)$ により，次の保存量が構成される：

$$\text{(15)}\left\{\begin{aligned}\Omega=\dot{x}^\mu&\left\{e^{-\rho t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}^\mu\partial \dot{x}^\nu}\frac{d\varphi^\nu}{dt}\right.\right.\\&\quad\left.+\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}^\mu\partial x^\nu}\varphi^\nu\right)+\frac{\partial G^\nu}{\partial \dot{x}^\mu}\eta_\nu+\pi_\kappa\times\\&\quad\left.\left(\frac{\partial^2 G^\kappa}{\partial \dot{x}^\mu\partial \dot{x}^\nu}\frac{d\varphi^\nu}{dt}+\frac{\partial^2 G^\kappa}{\partial \dot{x}^\mu\partial x^\nu}\varphi^\nu\right)\right\}\\&-\left\{e^{-\rho t}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \dot{x}^\mu}+\frac{\partial U}{\partial x^\mu}\right)\right.\\&\quad\left.+\pi_\nu\left(\rho\frac{\partial G^\nu}{\partial \dot{x}^\mu}+\frac{\partial G^\nu}{\partial x^\mu}\right)\right\}\varphi^\mu\end{aligned}\right.$$

ここで $U(\dot{x},x,u)$ と $G^\kappa(\dot{x},x,u)$ はそれぞれ状態変数 x とその微分 $\dot{x}$ に関して r 次と s 次の同次関数，即ち

$$
(16)\qquad
\begin{cases}
\dot{x}^{\nu}\dfrac{\partial U}{\partial x^{\nu}}+x^{\nu}\dfrac{\partial U}{\partial x^{\nu}}=rU\\[2ex]
\dot{x}^{\nu}\dfrac{\partial G^{\kappa}}{\partial x^{\nu}}+x^{\nu}\dfrac{\partial G^{\kappa}}{\partial x^{\nu}}=sG^{\kappa}
\end{cases}
$$

を満たしているとする。このとき$(\varphi^{\mu},\tau^{\sigma},\eta_{\mu})=(x^{\mu},0,(r-s)\pi_{\mu})$が（14a），（14b），（14c）を満たす解であることを示す。$(\varphi^{\mu})=(x^{\mu})$のとき，$G^{\kappa}$の同次性より（14a）の左辺は$sG^{\kappa}$となり，これは拘束条件（12）の下で零，即ち（14a）が満たされる。次に（16）の$\dot{x}^{\mu}$についての微分：

$$
(17)\begin{cases}
\dot{x}^{\nu}\dfrac{\partial^2 U}{\partial\dot{x}^{\mu}\partial\dot{x}^{\nu}}+x^{\nu}\dfrac{\partial^2 U}{\partial\dot{x}^{\mu}\partial x^{\nu}}=(r-1)\dfrac{\partial U}{\partial\dot{x}^{\mu}}\\[2ex]
\dot{x}^{\nu}\dfrac{\partial^2 G^{\kappa}}{\partial\dot{x}^{\mu}\partial\dot{x}^{\nu}}+x^{\nu}\dfrac{\partial^2 G^{\kappa}}{\partial\dot{x}^{\mu}\partial x^{\nu}}=(s-1)\dfrac{\partial G^{\kappa}}{\partial\dot{x}^{\mu}}
\end{cases}
$$

により（14b）の左辺は

$$
(r-1)\frac{d}{dt}\left(e^{-\rho t}\frac{\partial U}{\partial\dot{x}^{\mu}}+\pi_{\nu}\frac{\partial G^{\nu}}{\partial\dot{x}^{\mu}}\right)
$$

となる。又（16）のx^{μ}についての微分：

$$
\begin{cases}
\dot{x}^{\nu}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^{\mu}\partial\dot{x}^{\nu}}+x^{\nu}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}=(r-1)\dfrac{\partial G^{\kappa}}{\partial x^{\mu}}\\[2ex]
\dot{x}^{\nu}\dfrac{\partial^2 G^{\kappa}}{\partial x^{\mu}\partial\dot{x}^{\nu}}+x^{\nu}\dfrac{\partial^2 G^{\kappa}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}=(s-1)\dfrac{\partial G^{\kappa}}{\partial x^{\mu}}
\end{cases}
$$

により（14b）の右辺は

$$
(r-1)\left(e^{-\rho t}\frac{\partial U}{\partial x^{\mu}}+\pi_{\nu}\frac{\partial G^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)
$$

となり，両辺は（13a）より等しく，（14b）が満たされる。最後に（16）のu^{σ}に関する微分：

$$
\begin{cases}
\dot{x}^{\nu}\dfrac{\partial^2 G^{\kappa}}{\partial u^{\sigma}\partial\dot{x}^{\nu}}+x^{\nu}\dfrac{\partial^2 G^{\kappa}}{\partial u^{\sigma}\partial\dot{x}^{\nu}}=s\dfrac{\partial G^{\kappa}}{\partial u^{\sigma}}\\[2ex]
\dot{x}^{\nu}\dfrac{\partial^2 U}{\partial u^{\sigma}\partial x^{\nu}}+x^{\nu}\dfrac{\partial^2 U}{\partial u^{\sigma}\partial x^{\nu}}=r\dfrac{\partial G^{\kappa}}{\partial u^{\sigma}}
\end{cases}
$$

により（14c）の左辺は

$$
(s-1)\left(e^{-\rho t}\frac{\partial U}{\partial u^{\sigma}}+\pi_{\mu}\frac{\partial G^{\mu}}{\partial u^{\sigma}}\right)
$$

となり，これは（13b）より零で（14c）が満たされる。

（15）に解$(\varphi^{\mu},\tau^{\sigma},\eta_{\mu})=(x^{\mu},0,(r-s)\pi_{\mu})$を代入し（17）を用いて書き換えると保存量は次のようになる：

$$
\begin{cases}
\Omega=\{(r-1)\dot{x}^{\mu}-\rho x^{\mu}\}\times\\[1ex]
\qquad\left(e^{-\rho t}\dfrac{\partial U}{\partial\dot{x}^{\mu}}+\pi_{\nu}\dfrac{\partial G^{\nu}}{\partial\dot{x}^{\mu}}\right)\\[2ex]
\qquad-x^{\mu}\left(e^{-\rho t}\dfrac{\partial U}{\partial x^{\mu}}+\pi_{\nu}\dfrac{\partial G^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)
\end{cases}
$$

これを（13a）を用いて変形するか，更に

$$
\begin{cases}
\Omega=(r\dot{x}^{\mu}-\rho x^{\mu})\times\\[1ex]
\qquad\left(e^{-\rho t}\dfrac{\partial U}{\partial\dot{x}^{\mu}}+\pi_{\nu}\dfrac{\partial G^{\nu}}{\partial\dot{x}^{\mu}}\right)\\[2ex]
\qquad-e^{-\rho t}\left(\dot{x}^{\mu}\dfrac{\partial U}{\partial\dot{x}^{\mu}}+x^{\mu}\dfrac{\partial U}{\partial x^{\mu}}\right)\\[2ex]
\qquad-\pi_{\nu}\left(\dot{x}^{\mu}\dfrac{\partial G^{\nu}}{\partial\dot{x}^{\mu}}+x^{\mu}\dfrac{\partial G^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)
\end{cases}
$$

と書き換え，（16）（その第2式は拘束条件（12）より0）を用いて変形すると次の定理が得られる：

定理5．積分（11）の拘束条件（12）の下での極値問題において，$U(\dot{x},x,u)$と$G^{\kappa}(\dot{x},x,u)$がそれぞれ状態変数$x=(x^1,\cdots,x^n)$とその微分$\dot{x}=(\dot{x}^1,\cdots,\dot{x}^n)$に関して$r$次と$s$次の同次関数とする。このとき次の保存量が存在する：

$$(18)\quad \begin{cases} \Omega=\{(r-1)\dot{x}^{\mu}-\rho x^{\mu}\}\times \\ \qquad \left(e^{-\rho t}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{x}^{\mu}}+\pi_{\nu}\dfrac{\partial G^{\nu}}{\partial \dot{x}^{\mu}}\right) \\ \qquad -x^{\mu}\dfrac{d}{dt}\left(e^{-\rho t}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{x}^{\mu}}+\pi_{\nu}\dfrac{\partial G^{\nu}}{\partial \dot{x}^{\mu}}\right) \\ =(r\dot{x}^{\mu}-\rho x^{\mu})\times \\ \qquad \left(e^{-\rho t}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{x}^{\mu}}+\pi_{\nu}\dfrac{\partial G^{\nu}}{\partial \dot{x}^{\mu}}\right)-re^{-\rho t}U \end{cases}$$

注の論文12）において，二種の資本（物的資本と人的資本）を持つ経済成長モデルの分析に効果的に応用された次の定理[16] は，定理５のリダクションとして直ちに得られる。

定理６．積分（11）の拘束条件（12）の下での極値問題において，特に$U=U(x,u)$，$G^{\mu}=\dot{x}^{\mu}-F^{\mu}(x,u)$ とし $U(x,u)$ と $F^{\mu}(x,u)$ がそれぞれ状態変数 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ に関して r 次と１次の同次関数とする。このとき次の保存量が存在する：

$$(19)\quad \begin{cases} \Omega=(r-1)\pi_{\mu}\dot{x}^{\mu}-(\dot{\pi}_{\mu}+\rho\pi_{\mu})x^{\mu} \\ \quad =-re^{-\rho t}U+\pi_{\mu}(r\dot{x}^{\mu}-\rho x^{\mu}) \end{cases}$$

注

1）P. A. Samuelson, Law of conservation of the capital-output ratio, *Proc. Nat. Acad. Sci., Appl. Math. Sci*. **67** (1970), pp. 1477–1479.
2）T. Nôno, A classification of neutral technical changes: An application of Lie theory, II, III, *Bull. Fukuoka Univ. Ed. III* **20** (1970), 47–62; **21** (1971), 43–56; **22** (1972), pp. 67–81.
3）S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen I, II, III, Teubner, Leipzig (1888), (1890), (1893). Reprinted by Chelsea, New York (1970).
4）E. Noether, Invariante Variations Probleme, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Cl. II*, **1918** (1918), pp. 235–257.
5）E. Bessel-Hagen: Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik, *Math. Ann*. **84** (1921), pp. 258–276.
6）G. Caviglia, Composite variational principles, added variables, and constant of motion, *Internat. Theoret. Phys*. **25** (1986), pp. 139–146.
7）G. Caviglia, Composite variational principles and determination of conservation laws. *J. Math. Phys*. **29** (1988), pp. 812–816.
8）F. Mimura and T. Nôno, A method for deriving new conservation laws, *Bull. Kyushyu Inst. Tech. Math. Natur. Sci*. **42** (1995), pp. 1–17.
9）三村文武・藤原富美代・濃野隆之，最適制御問題における保存則の新しい導出法とその新古典派的経済成長理論への応用，広島経済大学経済論集 第33巻第２号（2010），pp. 17–27.
10）三村文武・藤原富美代・濃野隆之，最適制御問題における保存則の新しい導出法とその枯渇性資源を含む最適資産蓄積問題への応用，広島経済大学経済論集　第34巻第１号（2011），pp. 13–22.
11）三村文武・藤原富美代・濃野隆之，最適制御問題における保存則の新しい導出法とその Open-loop ナッシュ戦略への応用，広島経済大学経済論集　第34巻第２号（2011），pp. 13–22.
12）三村文武・藤原富美代・濃野隆之，最適制御問題における保存則の新しい導出法とその物的資本と人的資本を持つ経済成長モデルへの応用，広島経済大学経済論集　第35巻 第１号（2012），pp. 21–27.
13）Reference 8), Theorem 6.
14）F. Fujiwara, F. Mimura and T. Nôno, New derivation of conservation laws for maximizing problem under constraints, *Sci. Math. Japon*. **55** (2001), pp. 383–392, Theorem 1.
15）Reference 14), Theorem 2.
16）F. Mimura, F. Fujiwara and T. Nôno, A relaxation of the homogeneities imposed on the relating functions in the extremal problem for the derivation of conserved quantities, *Sci. Math. Japon*. **62** (2007), pp. 17–25, Theorem 1.