広島経済大学経済研究論集
第36巻第１号　2013年６月

最適制御問題における保存則の新しい導出法とその応用
――アシュケナージの二部門経済成長モデルの一般化――

三　村　文　武*

は じ め に

1970年，サミュエルソン[1] は保存則を初めて理論経済学に明示的に導入し「運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は一定である」という力学的エネルギー保存則との類似に注目し，すべての産出物がシステムの成長のための資本形成に供されるような新古典派的フォン・ノイマン型経済成長モデルにおいて「総産出-総資本比は一定である」という保存則を導出した。また，濃野[2] はリーの理論[3] の理論経済学への応用を提唱し，その例証として生産関数のリー変換群の下での対称性（不変性）に基づいて，中立型技術変化の完全なリストを完成させた。

古典力学においては，リー変換群の下での作用積分の対称性（不変性）に基づくネータの定理[4] および発散項を伴うその一般化[5] は，ラグランジュ（又はハミルトン）構造から保存則を発見する上で重要な役割を果たしてきた。一方，カビグリア[6, 7] は新たな変数を付加した高次元の空間での変分原理を利用して，ラグランジュ（又はハミルトン）構造を用いない保存則の新しい導出法を見出した。その後，三村-濃野[8] はネーターよりもより一般的であるこのカビグリアの手法を更に考察・発展させ，与えられた力学系の保存則を導出する効果的な手法として確立し，動力学および経済動学の種々のモデルにおける保存則の導出とそれらのモデルの動学的性質の解明に応用した。我々は前稿でその手法を特に新古典派的経済成長理論への応用[9]，枯渇性資源を含む最適資産蓄積問題への応用[10]，Open-loop ナッシュ戦略における公共財の自発的供給問題の分析への応用[11] および物的資本と人的資本を持つ経済成長モデルへの応用[12] について紹介した。また拘束条件つき最適制御問題の更なる一般化[13] について考察した。

本稿では，最初にこの更なる一般化における拘束条件を排除し，考察の最適制御問題のリダクションを行う。次に物的資本と人的資本を持つ経済成長モデル[14–17] への応用として，特に注の論文12）で考察したアシュケナージのモデルにおける拘束条件を排除し，最大化を図る被積分関数を一般化する。最後にリダクションで得られた手法をこの一般化したモデルへ応用して保存量を構成する。構成したこの保存量はアシュケナージが考察した拘束条件を付加することにより彼が見出した保存量となるが，拘束条件は更に一般化して付加することもできる。

本稿を通して各項の繰り返し現れる同じ添字については総和をとるという和の規約を採用し，関数は必要な階まで微分可能とする。

1.　一般化した最適制御問題と保存量

注の論文12）を一般化した論文13）における最適制御問題と保存量の構成法について述べる。

有限 $[0, T]$ $(T<\infty)$ または無限 $[0, T)$ $(T=\infty)$ の時間区間における積分

* 広島経済大学経済学部教授
（Received, February 27, 2013）

(1) $$\int_0^T e^{-\rho t}U(\dot{x},x,u)dt$$

の，拘束条件

(2) $$G^\mu(\dot{x},x,u)=0$$

の下での極値問題を考察する。ここに $x=(x^\mu(t))$ $(\mu=1,\cdots,k)$ は状態変数，$\dot{x}^\mu$ はその微分 $\dot{x}^\mu=dx^\mu/dt$，$u=(u^\sigma(t))$ $(\sigma=1,\cdots,\ell)$ は制御変数，ρ $(\rho\geq 0)$ は定数である。この問題のラグランジアンは π_μ をラグランジュ乗数として

$$\begin{cases} L(\dot{x},\dot{u},\dot{\pi},x,u,\pi,t) \\ \quad =e^{-\rho t}U(\dot{x},x,u)+\pi_\mu G^\mu(\dot{x},x,u)\end{cases}$$

で与えられ，そのオイラー-ラグランジュ方程式系（E-L 方程式系）は(2)および

(3a) $$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x^\mu}=0: \\ \dfrac{d}{dt}\left(e^{-\rho t}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{x}^\mu}+\pi_\nu\dfrac{\partial G^\nu}{\partial \dot{x}^\mu}\right) \\ \quad =e^{-\rho t}\dfrac{\partial U}{\partial x^\mu}+\pi_\nu\dfrac{\partial G^\nu}{\partial x^\mu}\end{cases}$$

(3b) $$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}^\sigma}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial u^\sigma}=0: \\ e^{-\rho t}\dfrac{\partial U}{\partial u^\sigma}+\pi_\mu\dfrac{\partial G^\mu}{\partial u^\sigma}=0\end{cases}$$

から成る。この極値問題の最適経路上，即ち E-L 方程式系(2)，(3a)，(3b)の解上で

(4) $$\frac{d\Omega(\dot{\pi},\dot{x},\dot{u},\pi,x,u,t)}{dt}=0$$

（d/dt は t についてのトータル微分）を満たす Ω を極値問題の保存量（オイラー-ラグランジュ方程式系の第一積分），(4)を保存則という。先ず次の定理を挙げる[18)]。

定理１．積分(1)の拘束条件(2)の下での極値問題において，$U(\dot{x},x,u)$ と $G^\mu(\dot{x},x,u)$ がそれぞれ状態変数 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ とその微分 $\dot{x}=(\dot{x}^1,\cdots,\dot{x}^n)$ に関して r 次と s 次の同次関数とする。このとき次の保存量が存在する：

(5) $$\begin{cases} \Omega=\{(r-1)\dot{x}^\mu-\rho x^\mu\}\times \\ \quad \left(e^{-\rho t}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{x}^\mu}+\pi_\nu\dfrac{\partial G^\nu}{\partial \dot{x}^\mu}\right) \\ \quad -x^\mu\dfrac{d}{dt}\left(e^{-\rho t}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{x}^\mu}+\pi_\nu\dfrac{\partial G^\nu}{\partial \dot{x}^\mu}\right) \\ =(r\dot{x}^\mu-\rho x^\mu)\times \\ \quad \left(e^{-\rho t}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{x}^\mu}+\pi_\nu\dfrac{\partial G^\nu}{\partial \dot{x}^\mu}\right)-re^{-\rho t}U\end{cases}$$

注の論文12）において，二種の資本（物的資本と人的資本）を持つ経済成長モデルの分析に効果的に応用された次の定理[19)]は，定理１のリダクションとして直ちに得られる。

定理２．積分(1)の拘束条件(2)の下での極値問題において，特に $U=U(x,u)$，$G^\mu=\dot{x}^\mu-F^\mu(x,u)$ とし $U(x,u)$ と $F^\mu(x,u)$ がそれぞれ状態変数 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ に関して r 次と１次の同次関数とする。このとき次の保存量が存在する：

(6) $$\begin{cases} \Omega=(r-1)\pi_\mu\dot{x}^\mu-(\dot{\pi}_\mu+\rho\pi_\mu)x^\mu \\ \quad =-re^{-\rho t}U+\pi_\mu(r\dot{x}^\mu-\rho x^\mu)\end{cases}$$

定理１において制御変数および(2)の拘束条件を排除，即ち(5)の G^ν を $G^\nu\equiv 0$ とおいて次の定理が得られる[20)]。

定理３．積分(1)の極値問題において，$U(\dot{x},x)$ が状態変数 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ とその微分 $\dot{x}=(\dot{x}^1,\cdots,\dot{x}^n)$ に関して r 次の同次関数とする。このとき次の保存量が存在する：

(7) $$\Omega=e^{-\rho t}\left((r\dot{x}^\mu-\rho x^\mu)\frac{\partial U}{\partial \dot{x}^\mu}-rU\right)$$

これはラグランジアン $L=e^{-\rho t}U$ に対する修正ハミルトニアン

$$\begin{cases} \tilde{H} = H - \dfrac{\rho}{r} x^{\mu} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} \\ \quad = \left(\dot{x}^{\mu} - \dfrac{\rho}{r} x^{\mu}\right) \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} - L \end{cases}$$

を用いて $\Omega = r\tilde{H}$ と書ける。

2.　二部門経済成長モデル

2.1.　モデルの一般化

アシュケナージは注の文献17）において無限時間区間における積分：

$$(8) \quad \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt \quad \begin{pmatrix} \rho, \sigma : \text{const.}; \\ \rho \geq 0,\ \sigma \neq 1 \end{pmatrix}$$

の，拘束条件

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{p} = s_p f(p, h) - (\delta_p + n) p \\ \dot{h} = s_h f(p, h) - (\delta_h + n) h \end{cases}$$

の下での最大化問題を考察している。ここに生産関数 $f(p, h)$ は状態変数 $x^1 = p$ （物的資本）と $x^2 = h$ （人的資本）について1次同次であり，消費の総計

$$(10) \quad c = (1 - s_p - s_h) f(p, h) \quad (c \neq 0)$$

における $u^1 = s_p$ と $u^2 = s_h$ はそれぞれ生産 $f(p, h)$ の物的資本と人的資本への分配率，δ_p と δ_h はそれぞれ物的資本と人的資本の減価償却率，n は人口増加率である。アシュケナージはこの2部門経済成長モデルにネーターの定理を用いて保存量を構成しているが，我々のネーターの定理を用いない保存量を構成する前章の定理2は，注の論文12）においてより効果的にこのモデルに応用されている。

拘束条件(9)を用いると消費の総計(10)は

$$(11) \quad \begin{cases} c = f(p, h) - \dot{p} - \dot{q} \\ \quad - (\delta_p + n) p - (\delta_h + n) h \end{cases}$$

と書き換えられる（単一資本 k に関するラムゼイ型成長モデルにおける消費は $c = f(k) - \dot{k} - nk$ である[21]）。ここで拘束条件(9)を排除し，(11)で与えられる消費の総計を持つ積分(8)の最大化問題を設定し，これに定理3を $n = 2$, $x^1 = p$, $x^2 = h$ として適用すると，次の定理が得られる。

定理4．消費の総計(11)を持つ積分(8)の最大化問題において，生産関数 $f(p, h)$ が物的資本 p と人的資本 h に関して1次の同次関数であるとする。このとき次の保存量が存在する：

$$(12) \quad \begin{aligned} \Omega = -e^{-\rho t} c^{1-\sigma} \{ &(\sigma - 1)(\dot{p} + \dot{h}) c^{-1} \\ &+ \rho (p + h) - 1 \} \end{aligned}$$

ここで，積分(8)が存在するための条件：

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} c^{1-\sigma} = 0$$

を考慮して，定数 Ω は零，従って

$$(13) \quad (\sigma - 1)(\dot{p} + \dot{h}) + \rho (p + h) - c = 0$$

となる。これに(11)の c を代入すると

$$(14) \quad \begin{cases} \sigma (\dot{p} + \dot{h}) - f \\ \quad + (\delta_p + n) p + (\delta_h + n) h \\ \quad + \rho (p + h) = 0 \end{cases}$$

となる。定理4における最大化を図った後，条件(9)を付加すれば，これを用いて(14)の $\dot{p} + \dot{h}$ が消去され，アシュケナージが拘束条件(9)の下での積分(8)の最大化問題において求めた保存則[22]：

$$(15) \quad \begin{cases} \dfrac{1 - \sigma (s_p + s_n)}{1 - \sigma} f \\ \quad = \left(\dfrac{\rho}{1 - \sigma} + n \right) (p + h) \\ \quad + \delta_p p + \delta_h h \end{cases}$$

となる。

注意1．保存量(12)，(13)，(14)は消費の総計(11)を持つ積分(8)の最大化問題より得られたもので，条件(9)には依存しない。ここで(9)を p，h に関して1次同次の任意関数 $\varphi(p,h)$ を用いて

(16)
$$\begin{cases} \dot{p}=s_p f(p,h)-(\delta_p+n)p \\ \qquad +\varphi(p,h) \\ \dot{h}=s_h f(p,h)-(\delta_h+n)h \\ \qquad -\varphi(p,h) \end{cases}$$

と一般化して消費の総計(10)を書き換えても(11)が得られる。更に(9)のかわりに(16)を用いても $\dot{p}+\dot{h}$ は変わらない。従って拘束条件(9)の下での積分(8)の最大化問題と拘束条件(16)の下での積分(8)の最大化問題には同じ保存量(15)が存在する。

2.2.　最適経路の決定

考察の最大化問題におけるラグランジアンは消費の総計(11)を持つ(8)の被積分関数 $L=e^{-\rho t}c^{1-\sigma}/(1-\sigma)$ であり，そのオイラー-ラグランジュ方程式系（E-L 方程式系）は

(17a)
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right)=\dfrac{\partial L}{\partial p}: \\ \quad \dfrac{d}{dt}(-e^{-\rho t}c^{-\sigma}) \\ \qquad =e^{-\rho t}c^{-\sigma}\left(\dfrac{\partial f}{\partial p}-\delta_p-n\right) \end{cases}$$

(17b)
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{h}}\right)=\dfrac{\partial L}{\partial h}: \\ \quad \dfrac{d}{dt}(-e^{-\rho t}c^{-\sigma}) \\ \qquad =e^{-\rho t}c^{-\sigma}\left(\dfrac{\partial f}{\partial h}-\delta_h-n\right) \end{cases}$$

となる。これより

$$\delta_p=\delta_h+\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial h}$$

従って

$$(\delta_p+n)p=\left(\delta_h+n-\frac{\partial f}{\partial h}\right)p+\frac{\partial f}{\partial p}p$$

この式の項 $(\partial f/\partial p)p$ を f の同次性：

$$\frac{\partial f}{\partial p}p+\frac{\partial f}{\partial h}h=f$$

を用いて消去すれば

$$(\delta_p+n)p=(\delta_h+n)p-\frac{\partial f}{\partial h}(p+h)+f$$

となる。これより(14)は

(18)
$$\sigma\frac{\dot{p}+\dot{q}}{p+q}-\frac{\partial f}{\partial h}+\delta_h+n+\rho=0$$

となる。他方(17b)は

$$-\frac{dc^{-\sigma}}{dt}+\rho c^{-\sigma}=c^{-\sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial h}-\delta_h-n\right)$$

となり，従って

$$\frac{\partial f}{\partial h}-\delta_h-n-\rho=-\frac{1}{c^{-\sigma}}\frac{dc^{-\sigma}}{dt}$$

これを用いて(18)を

$$\sigma\frac{\dot{p}+\dot{q}}{p+q}+\frac{1}{c^{-\sigma}}\frac{dc^{-\sigma}}{dt}=0$$

と書き換えて積分すると

$$\begin{cases} \sigma\log(p+h)+\log c^{-\sigma} \\ \quad =\log\left(\dfrac{p+h}{c}\right)^{\sigma}=\text{const.} \end{cases}$$

即ち

(19)
$$c=k(p+h)\quad (k=\text{const.})$$

これより(13)は

$$(\sigma-1)(\dot{p}+\dot{h})+(\rho-k)(p+h)=0$$

となり

(20)
$$\frac{\dot{p}+\dot{h}}{p+h}=\frac{\rho-k}{1-\sigma}$$

と変形して積分すると

(21) $$p+h=Ae^{\frac{\rho-k}{1-\sigma}t} \quad (A\text{: const.})$$

が得られる。

(19)に(11)の c を代入して k について解くと

$$k=\frac{f-(\delta_p+n)p-(\delta_h+n)h}{p+h}-\frac{\dot{p}+\dot{q}}{p+h}$$

更にこの式の項 $(\dot{p}+\dot{q})/(p+q)$ に(20)を代入して k について解くと

$$\begin{cases} k=\dfrac{\rho-n(\sigma-1)}{\sigma}+\dfrac{\sigma-1}{\sigma}\times \\ \qquad \dfrac{f-\delta_p p-\delta_h h}{p+h} \end{cases}$$

この式に物的資本と人的資本の初期値 $p_0=p(0)$ と $h_0=h(0)$ を代入すると(19)の定数 $k=c/(p+h)$ の値が定まる：

(22) $$\begin{cases} k=\dfrac{\rho+n(\sigma-1)}{\sigma}+\dfrac{\sigma-1}{\sigma}\times \\ \qquad \dfrac{f(p_0,h_0)-\delta_p p_0-\delta_h h_0}{p_0+h_0} \end{cases}$$

(18)と(20)より

$$\frac{\partial f}{\partial h}=\frac{\sigma(\rho-k)}{1-\sigma}+\delta_h+n+\rho$$

これに(22)の定数 k を代入して

$$\frac{\partial f}{\partial h}=\frac{f(p_0,h_0)-(\delta_p-\delta_h)p_0}{p_0+h_0}\equiv\text{const.}$$

これは，1次同次の関数 $f(p,h)$ を $X=h/p$ $(X>0)$ を用いて $f(p,h)=pf(1,X)$ と表すと，$\partial f(p,h)/\partial h=df(1,X)/dX$ であるから

(23) $$\frac{df(1,X)}{dX}=\frac{f(p_0,h_0)-(\delta_p-\delta_h)p_0}{p_0+h_0}$$

と書き換えられる。これが解

(24) $$X=\frac{h}{p}=B \quad (B\text{: const.})$$

を持つとき，(21)より次の最適経路が定まる：

(25) $$\begin{cases} p(t)=\dfrac{A}{1+B}e^{\frac{\rho-k}{1-\sigma}t} \\ h(t)=\dfrac{AB}{1+B}e^{\frac{\rho-k}{1-\sigma}t} \end{cases}$$

定理5．消費の総計(11)を持つ積分(8)の最大化問題において，生産関数 $f(p,h)$ が物的資本 p と人的資本 h に関して1次の同次関数であるとする。このとき，与えられた初期値 p_0 と h_0 に対して，(23)が解(24)をもつならば，$p(t)$ と $h(t)$ の最適経路(25)が存在する。

ここで消費の総計(11)を持つ積分(8)の最大化問題に条件(16)を付加する。このとき，最適経路(25)を代入すると(16)は

$$\begin{cases} s_p f=\left(\dfrac{\rho-k}{1-\sigma}+\delta_p+n\right)p-\varphi \\ s_h f=\left(\dfrac{\rho-k}{1-\sigma}+\delta_h+n\right)h+\varphi \end{cases}$$

となり，従って

(26) $$\begin{cases} s_p(t)=\left(\dfrac{\rho-k}{1-\sigma}+\delta_p+n\right)\dfrac{1}{f(1,B)} \\ \qquad -\dfrac{\varphi(1,B)}{f(1,B)} \\ s_h(t)=\left(\dfrac{\rho-k}{1-\sigma}+\delta_h+n\right)\dfrac{B}{f(1,B)} \\ \qquad +\dfrac{\varphi(1,B)}{f(1,B)} \end{cases}$$

定理6．消費の総計(11)を持つ積分(8)の，条件(16)の下での最大化問題において，生産関数 $f(p,h)$ と $\varphi(p,h)$ は物的資本 p と人的資本 h に関して共に1次同次であるとする。このとき，与えられた初期値 p_0 と h_0 に対して，(23)が解(24)をもつならば，生産 $f(p,h)$ の物的資本と人的資本への分配率 $s_p(t)$ と $s_h(t)$ の最適経路(26)が存在する。

注意２．注12）の論文では，拘束条件(9)の下で，消費の総計(10)従って(11)を持つ積分(8)の最大化問題より物的資本 p と人的資本 h の最適経路(25)を決定した[23)]。しかし定理５は，条件(9)を排除して，消費の総計(11)を持つ積分(8)の最大化問題より最適経路(25)が決定できることを示している。さらに注12）の論文では，拘束条件(9)の下で物的資本と人的資本への分配率 $s_p(t)$ と $s_h(t)$ の最適経路も決定した。これは定理５に示した物的資本 p と人的資本 h の最適経路(25)を決定した後，(25)を条件(9)に代入して得られる式より定まる。結果は(26)において $\varphi\equiv 0$ としたものである[24)]。

注

1） P. A. Samuelson, Law of conservation of the capital-output ratio, *Proc. Nat. Acad. Sci., Appl. Math. Sci.* **67** (1970), pp. 1477–1479.

2） T. Nôno, A classification of neutral technical changes: An application of Lie theory, II, III, *Bull. Fukuoka Univ. Ed. III* **20** (1970), 47–62; **21** (1971), 43–56; **22** (1972), pp. 67–81.

3） S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen I, II, III, Teubner, Leipzig (1888), (1890), (1893). Reprinted by Chelsea, New York (1970).

4） E. Noether, Invariante Variations Probleme, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Cl. II,* **1918** (1918), pp. 235–257.

5） E. Bessel-Hagen: Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik., *Math. Ann.* **84** (1921), pp. 258–276.

6） G. Caviglia, Composite variational principles, added variables, and constant of motion, *Internat. Theoret. Phys.* **25** (1986), pp. 139–146.

7） G. Caviglia, Composite variational principles and determination of conservation laws. *J. Math. Phys.* **29** (1988), pp. 812–816.

8） F. Mimura and T. Nôno, A method for deriving new conservation laws, *Bull. Kyushyu Inst. Tech. Math. Natur. Sci.* **42** (1995), pp. 1–17.

9） 三村文武・藤原富美代・濃野隆之，最適制御問題における保存則の新しい導出法とその新古典派的経済成長理論への応用，広島経済大学経済論集　第33巻第２号（2010），pp. 17–27.

10） 三村文武・藤原富美代・濃野隆之，最適制御問題における保存則の新しい導出法とその枯渇性資源を含む最適資産蓄積問題への応用，広島経済大学経済論集　第34巻第１号（2011），pp. 13–22.

11） 三村文武・藤原富美代・濃野隆之，最適制御問題における保存則の新しい導出法とその Open-loop ナッシュ戦略への応用，広島経済大学経済論集　第34巻第２号（2011），pp. 13–22.

12） 三村文武・藤原富美代・濃野隆之，最適制御問題における保存則の新しい導出法とその物的資本と人的資本を持つ経済成長モデルへの応用，広島経済大学経済論集　第35巻第1号（2012），pp. 21–27.

13） 三村文武，最適制御問題における保存則の新しい導出法─拘束条件付き極値問題の一般化─，広島経済大学経済論集　第35巻第２号（2012），pp. 1–6. p. 2 二段 2 行目，(9*a*)，(9*b*)は(7*a*)，(7*b*)に訂正。

14） N. Gregory Mankiw, --D. Romer and David N. Weil, A contribution to the empirics of economic growth, *Q. J. Economics* **106** (1992), pp. 407–437.

15） J. Caballé and Manuel S. Santos, On endogeneous growth with physical and human capital, *J. Political Economy* **101** (1993), pp. 1042–1067.

16） K. Mino, Productivity gap and economic growth under increasing returns, *Global competition and integration*, ed., R. Sato, R. V. Ramachandran and K. Mino, Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, (1999), pp. 267–289.

17） P. Askenazy, Symmetry and optimal control in economics, *J. Math. Anal. Appl.* **282** (2003), pp. 603–613.

18） 論文13），定理５，p. 5.

19） 論文13），定理６，p. 6.

20） 論文9），定理９，p. 22.

21） R. Sato, Theory of technical change and economic invariance, Application of Lie groups, Acdemic Press, Inc., New York, (1981), p. 251.

22） 論文17），p. 612.

23） 論文12），p. 25.

24） 論文12），p. 26.