広島経済大学経済研究論集
第23巻第4号　2001年3月

ソローの成長モデル

森　井　昭　顕*

I　はしがき

近代経済学はケインズ（J. M. Keynes）理論から急激な進歩をとげ，比較静学のみならず動学的経済学へと発展していった。その貢献者はハロッド（R. F. Harrod）であろう。ハロッドは直接にケインズ経済学の原点と発展に熱中していった。そして彼はケインズの新しい利子論と事前的貯蓄と投資スケジュールの接点に依存する新古典派理論（Neoclassical theory）との関係を明らかにする一助になっている。

ハロッドの基本的な革新は経済の均衡成長経路の発明であり，適正成長ライン（Warranted line of growth）として述べていることである。ハロッドの適正成長率 G_w の公式は，産業および商業投資の決定が完全な経済的均衡を達成するために注視しなければならない必然的な均衡成長経路を述べることを意図していた。彼の均衡あるいは適正成長経路は，国民所得のみに依存している貯蓄が継続的に投資に吸収されるということが要求されている。産出物の適正成長率は年当り s/C_r パーセントであるという前提に立っている。ここで s は国民所得に依存する貯蓄率であり，C_r は余分な産出物単位を生産するための附加的資本単位すなわち限界資本係数である。国民所得の s/C_r パーセントによる産出物増加は，C_r の均衡投資倍（times）国民所得の s パーセント，つまり国民所得の事前的貯蓄率を必要とする。事前的貯蓄以上の事前的投資の超過額は，国民所得の特別な拡張を想起させるのである。それ故に現実の成長率が s/C_r パーセントの適正率を超える場合，現実の成長は上昇する趨勢がある。このことはハロッドの剣刃（Knife-edge）として知られているものである。従って均衡あるいは適正成長経路を超える成長率は，連続的な成長の加速を始めるだろうし，一方その不足は減速を始めるだろうということを示唆している。

計画された投資がどの程度産出物を増加するかを決定する限界資本係数 C_r は，

* 広島経済大学経済学部教授

新しい純誘発投資の要求である。投資決定が産出物の短期変動と独立である限り，C_r はその経済の全般的資本産出物よりも低い。計画された貯蓄増加を決定するに関連した係数は，限界貯蓄性向であり，平均貯蓄性向ではない。計画された貯蓄は適正率から上方へそれてより多くの産出物を増加する。その場合平均貯蓄性向に関連して，限界貯蓄性向は大きいのである。

ハロッドの偉大な発明は適正成長率とその不安定性である。彼はこの均衡率を自然成長率 G_n と対比させている。自然成長率とは人口増加と技術改善を考慮に入れた進歩率であり，全く適正成長率とは独立しているのである。ハロッドはより厳密に技術進歩率を，利子率を一定とし，資本係数の価値に吸収されない労働生産性増加と定義する。これはハロッドの中立的技術進歩（Harrod-neutral technical progress）と称されており，自然成長率を決定するのである。つまり長期において実際に産出物を増加させる率である。しかしこの自然成長率と適正成長率との対比は全く新しい視点を提供しているのである。適正成長率が実行可能な自然成長率を超えるならば，均衡成長の達成は実際的でないであろう。何故ならばその経済は自然成長率よりも速く成長を継続することはできないからである。すなわちわれわれがその経済に一般に景気減速を期待しなければならない結果によって，それが上方にそれるよりも以上にはるかに，自然成長率に向って適正成長率から下方へそれるであろう。自然成長率が大きいならば，その経済がブーム状態に向って現今の趨勢を享受するだろうという結果によって，産出物は自然成長率を上方へそらす傾向がある。

そこでハロッドは G_p/e の価値とともに効用を極大にする最適な実質利子率 r_n があることを提出する。ここで G_p は労働生産性に関する長期成長率であり，e はそれらの増加に関する1人当りの実質所得から導かれる総効用の弾力性である。所得の限界効用（Marginal utility of income）が1人当り実質所得が増加する場合に，少しでも下落しないならば，1人当り効用は所得が1％増加する場合に1％成長する。すなわち e は1（Unity）であり，r_n は G_p に等しい。より極端に所得の限界効用が下落するならば，e は1よりも以下に下落し，最適実質利子率 G_p/e は労働生産性の成長率を超過するというのである。

ハロッドの成長モデルの詳細な技術的特徴は，ハロッド＝ドーマーの成長モデル（Harrod-Domar growth model）である。ハロッド＝ドーマーの分析は長期完全雇用が次の2つの基本的条件を満されねばならないということである。

第一に，経済が毎年完全雇用貯蓄を投資しなければならない。貯蓄が完全雇用国民所得の s_f パーセントであり，投資がこれに達しない場合，有効需要は完全雇用

に対して十分でないはずである。

第二に，継続的完全雇用に対して，産出物の成長率は物理的労働力の成長プラス労働生産性の増加率に等しくなければならない。毎年多くの労働者の n パーセントが産出物を a パーセント生産する場合，継続的完全雇用は生産が年（$n+a$）パーセント成長する必要がある。産出物がこれよりも以下で成長する場合，n パーセントの労働者を使用する必要がなく，そこで労働力をジョイントしようとする過剰労働者は雇用を見出すことができない。

ハロッド＝ドーマーはこれらの基本的条件から導かれる成長率 g を公式にするということを発見した。ここで g は dY/Y と定義することができる。つまり dYは産出物増加であり，Y は産出物水準である。そこで dY/Y は一義的に dK/Y を dK/dY で除したものに等しく，dK/Y は資本／産出物すなわち投資／産出物の増加であり，一方 dK/dY は資本増加／産出物増加，あるいは限界資本－産出物比である。それ故に $g \equiv I/Y \div C$ である。ここで I/Y は投資／産出物であり，C は資本－産出物比である。

ハロッド＝ドーマーの成長モデルは現実に予測できるもののうちの一つであるが，本気で配慮する価値のあるものであることには相違ない。

ソロー（Robert Solow）は新古典派の成長モデルを提案したのであるが，ケインジアンモデルを継承し，彼を信認していたハロッドの成長モデルから，別々に論文は発表されたのであるが，よく知られているハロッド＝ドーマーの成長モデルへと展開され，ソローの成長モデルへと一連の流れが生じているのである。現実には彼等のこれらのモデルは多方面へ向って展開され，モデル分析がなされているのである。潜在的にエンプティ・ブレインの持主である私にとって，一気に理解し，先駆者のモデルを分析することは遠い道程かもしれない。しかしながら牛歩の如く踏みしめたい気持はサフィシェントである。けれども本稿における文中において誤謬あるいは不十分な理解および読解力のなさによる誤解すべては，私自身の責任であり，諸氏の叱咤激励を拝授したい。

Ⅱ　ソローの生産関数

ソローのモデルは技術進歩を所与として，産出物の消費と投資への分割が資本蓄積や成長に与える影響を分析しているのである。まずソローの生産関数[(1)]は次のような式で表わされている。

$$Y(t)=F[K(t),A(t)L(t)] \qquad (1)$$

ここで Y は産出物，K は資本，L は労働，A は知識あるいは労働の効率性であり，t は時点である。

この生産関数の特徴として，デビッド（David Romer）は次のように示している。

(1)　時間は生産関数自体に表われるのではなく，K, L, A を通じてのみ生産に影響する。従って産出量は生産のための投入が変化した場合にのみ時間とともに変化する。特に一定量の資本と労働から得られる産出量は，技術進歩による知識量が増加する場合にのみ，増加が可能である。

(2)　A, L は AL の形で生産関数に表わされ，AL は効率的労働（Effective labour）と呼ばれている。生産関数に A を加えることで，資本／産出物比率（K/Y）が最終的に一定値に収束していくというのである。

ソローは同一水準の労働生産性を基準にして，技術進歩が労働の限界生産力に対して不変であるならば中立的であり，増大する場合には資本節約的であるといい，逆に減少するならば労働節約的であるといわれている。

ソローモデルにおける生産関数では収穫一定の法則が前提とされている。すなわち一次同時の生産関数が前提となっている。つまり次のような式が成立するということである。

$$F(\lambda K, \lambda AL) = \lambda F(K, AL) \qquad \because \lambda > 0 \tag{2}$$

この前提のもとで(1)式を AL で割れば，次のような式になる。

$$\frac{Y}{AL} = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) \tag{3}$$

ここで $\dfrac{Y}{AL}$ は効率的労働１単位当りの産出量であり，$\dfrac{K}{AL}$ は効率的労働１単位当りの資本量である。いま $y \equiv \dfrac{Y}{AL}$，$k \equiv \dfrac{K}{AL}$ とすれば，次のような式が得られる。

$$y = f(k) \tag{4}$$

すなわち効率的労働１単位当りの産出量は，効率的労働１単位当りの資本量によってのみ決定されるということを表わしている。そして $f(0)=0$ であり，$f'(k)>0, f''(k)<0$ であると仮定されている。すなわち効率的労働単位当り産出物は，いわゆる収穫逓減の法則を前提とするということを意味している。

いま資本・労働および知識の初期賦存量を所与とし，労働と知識は定率で増加するものと仮定すれば，次のような式で示される。

$$\dot{L}(t)=nL(t) \tag{5}$$

$$\dot{A}(t)=gA(t) \tag{6}$$

ここでドット（Dot）は時間で微分した導関数，つまり $\dot{X}(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ を表わしている[2]。また n および g は外生変数，言い換えればパラメーターである。(5)および(6)式はそれぞれ労働と知識が指数的に増加することを意味しているのであるから，それぞれ時点0における量，すなわち $L(0)$ および $A(0)$ とすれば，次のような式になる。

$$L(t)=L(0)e^{ut} \tag{7}$$

$$A(t)=A(0)e^{gt} \tag{8}$$

さて産出量は消費と投資および貯蓄に分けられ，産出量のうち投資に向けられる割合を s とすれば，s は外生変数として与えられる。つまり1単位の産出物を投資に回すことにより，1単位の新資本が創出されることを示唆しているのである。ここで資本は一定率 δ で減価償却するものと仮定すれば，次のような式で表わされ。

$$\dot{K}(t)=sY(t)-\delta K(t) \tag{9}$$

従って $sY(t)$ は産出量のうち投資される部分であり，$\delta K(t)$ は資本の減価償却分である。

経済は時間とともに拡大しているのであるから，資本ストックよりも効率的労働1単位当りの資本ストック k に注目する。従って $k=\dfrac{K}{AL}$ であるから，この式を t で微分すれば，次のような式が得られる[3]。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}-\frac{K}{AL}&=\frac{A(t)L(t)\dfrac{dK(t)}{dt}-K(t)\left[A(t)\dfrac{dL(t)}{dt}+L(t)\dfrac{dt(t)}{dt}\right]}{\left[A(t)L(t)\right]^2}\\&=\frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)}-\frac{K(t)}{\left[A(t)L(t)\right]^2}\left[A(t)\dot{L}(t)+L(t)\dot{A}(t)\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \\
&= \frac{sY(t) - \delta K(t)}{A(t)L(t)} - nk(t) - gk(t) \\
&= s\frac{Y(t)}{A(t)L(t)} - \delta k(t) - nk(t) - gk(t) \qquad (10)
\end{aligned}
$$

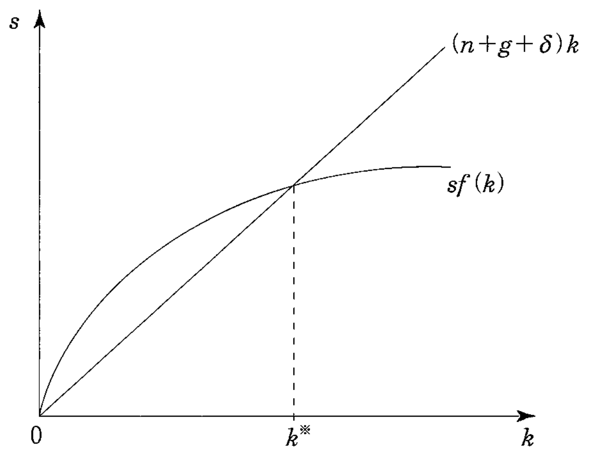
$$
\therefore \quad \dot{k}(t) = sf\left[k(t)\right] - (n + g + \delta)k(t) \qquad (11)
$$

(9)式は(5)，(6)および(9)式が考慮されていることに注意を要する。ここで(11)式の右辺第２項は，$n+g+\delta>0$ である。

(11)式は効率的労働１単位当りの資本ストックが，時間当りの変化によって，効率的労働１単位当りの投資すなわち貯蓄量，すなわち $f(k)$ は効率的労働単位当りの産出量であり，その産出量のうち貯蓄 s の部分が投資に回される部分 $sf(k)$ と，$(n+g+\delta)k$ は公平な機会投資（Break-even investment)，つまり k の現行水準を維持するに最低限必要な投資量のことである。

いまもし現実の効率的労働量が（$n+g$）率で増加しているならば，k を一定に保つためには，資本ストック量も（$n+g$）率で増加しなければならない。しかしながら現実の効率的労働１単位当り投資が k を一定に保つ水準，すなわちブレイク・イブン投資を越えている場合，k は上昇する。逆に現実の投資がブレイク・イブン投資を下回っている場合，k は低下する。両者が等しいならば k は一定水準となる。

いま縦軸に効率的労働１単位当りの投資つまり貯蓄，すなわち s を測り，横軸に k を測れば，第１図のように描くことができる。ブレイク・イブン投資（$n+g+\delta$）k は k に比例した直線になる。一方現実の投資 $sf(k)$ は効率的労働１単位当り産出物に乗数 s を掛けたものであり，$f(0)=0$ であるから，現実の投資 $sf(k)$ はブレイク・イブン投資と原点で交わる，すなわち $k=0$ である。しかし $f'(k)>0$ であるから，現実の投資 $sf(k)$ はブレイク・イブン投資（$n+g+\delta$）k より



第　１　図

も大きくなる。また $f''(k)<0$ であるから，現実の投資 $sf(k)$ はブレイク・イブン投資 $(n+g+\delta)k$ と一度だけ交わる。ただし $k>0$ であるということが必要である。すなわち2つの線は k^* で交わるのである。

労働と知識量はそれぞれ n および g の率で増加するのであるから，資本ストック K は ALk に等しいのである。従って k が一定であれば，K は $n+g$ の率で増加する。資本と効率的労働がともに $n+g$ の率で増加しているのであるから，生産関数が収穫一定であると仮定すれば，産出量 Y は同じ率で成長するということを意味している。

Ⅲ　可変的資本／産出物比(4)

(1)式と同様に，産出物 Y は規模に関して収穫一定のもとで，雇用あるいは労働量（L）および資本（K）で生産し，生産関数は一次同時（Homogeneous of degree one）であると仮定されている。ソローは生産関数をニュメレール（Numéraire）として次のような式で示している。

$$\frac{1}{V}=\frac{Y}{K}=F\left(\frac{L}{K}\right)=f(z) \tag{12}$$

ここで産出物単位当りの資本，すなわち資本／産出物比は $\frac{K}{Y}=V$ であり，資本1単位当りの産出物はその逆数，つまり $\frac{1}{V}$ である。また z は資本1単位当りの雇用である。

いま Y を粗産出物（Gross output）とすれば，$f(0)=0$ と仮定することができ，Y を純産出物，すなわち資本財の減価償却を控除した産出物とすれば，$f(0)<0$ と仮定させねばならない。任意のケースにおいて $f'>0$, つまり雇用の限界生産物が正であり，$f''<0$, すなわち雇用に対して収穫逓減であるということである。

経済が常に純産出物の一定部分を蓄えると仮定すれば，資本1単位当りの貯蓄および投資は，資本1単位当りの産出物の部分 s である。

いま(12)式を対数微分すれば，次のような式が与えられる。(5)

$$-\frac{\dot{V}}{V}=\frac{zf'(\delta)}{f(\delta)}\frac{\dot{z}}{z} \tag{13}$$

ここで $\frac{zf'(z)}{f(z)}=\eta(z)$ であり，雇用に関する産出物弾力性である。ただし $\eta(z)$ は1と0との間にある。そこで $V=\frac{K}{Y}$ であり，$z=\frac{L}{K}$ であるから，$\frac{\dot{V}}{V}=\frac{\dot{K}}{K}-\frac{\dot{Y}}{Y}$

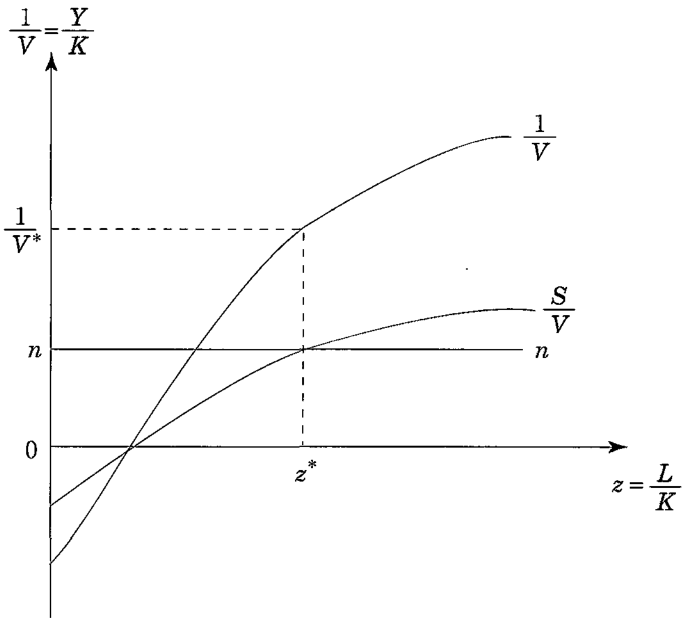
および $\frac{\dot{z}}{z}=\frac{\dot{L}}{L}-\frac{\dot{K}}{K}=n-\frac{\dot{K}}{K}$ と書くことができる。ここで n は労働力の成長率である。それ故に $\frac{\dot{V}}{V}$ および $\frac{\dot{z}}{z}$ を考慮すれば，次のような式になる。

$$\frac{\dot{V}}{V}=\frac{\dot{K}}{K}-\frac{\dot{Y}}{Y}=\eta(z)\left(\frac{\dot{K}}{K}-n\right) \tag{14}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y}-n=\left[1-\eta(z)\right]\left(\frac{\dot{K}}{K}-n\right) \tag{15}$$

すなわち資本ストックが労働力成長率，言い換えれば人口成長率つまり自然成長率（Natural rate of growth）よりも早く成長する場合，すなわち産出物が自然成長率よりも早く成長する場合，資本／産出物比は増加するのである。産出物に対する資本単位当りの貯蓄および投資，つまり貯蓄された産出物比は s であるから，$\dot{K}=sY$ で示されるから，$\frac{\dot{z}}{z}$ は次のような式で表わされる。

$$\frac{\dot{z}}{z}=\frac{\dot{L}}{L}-\frac{\dot{K}}{K}=n-\frac{\dot{K}}{K}=n-s\frac{Y}{K}=n-\frac{s}{V} \tag{16}$$

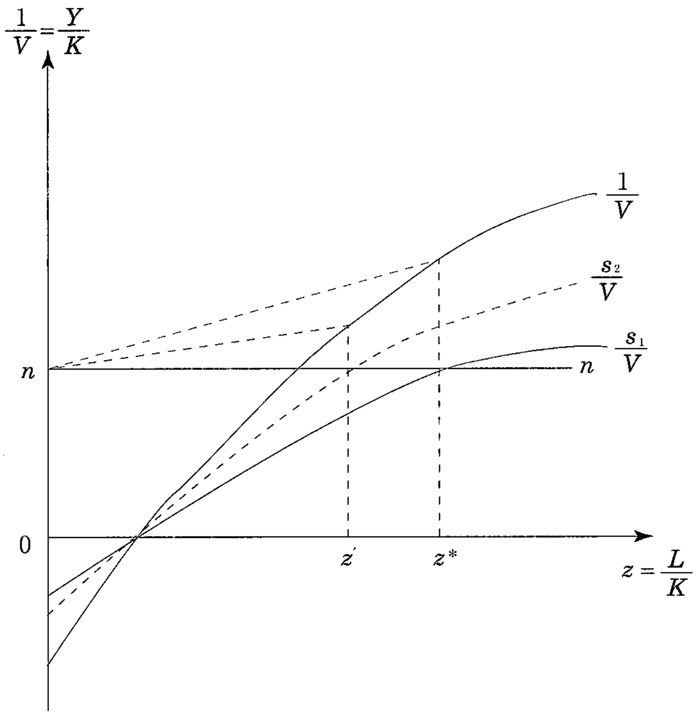


第 2 図

ここで $\dfrac{1}{V}$ は産出物／資本である。

いま縦軸に $\dfrac{1}{V}$ を測り，横軸に z を測れば，第２図のように描かれる。この作図から資本ストックが与えられた場合，産出物は雇用量に依存する。所与の資本ストックにおいてさえも，より多くの雇用はより多くの産出物を生産するであろう。しかしながら実際に資本が同質であるならば，収穫逓減に属する湾曲（Currature）になる。資本単位当り産出物つまり $\dfrac{1}{V}=\dfrac{Y}{K}$ は，資本／産出物 V の逆数であるから，結局資本／産出物比は資本単位当り雇用が変化する場合に如何に変化するかを，この曲線は示している。

そこで z は $n>\dfrac{s}{V}$ の場合増加し，$n<\dfrac{s}{V}$ の場合に z は下落する。$n=\dfrac{s}{V}$ の場合に定常（Stationary）となる。V が z の減少関数であると仮定されているのであるから，ただ１つの z が存在する。つまり $n=\dfrac{s}{V}$ において z^* となるのである。$z>z^*$



第 3 図

の場合，$n<\frac{s}{V}$であり，z は下落する。$z<z^*$ の場合，$n>\frac{s}{V}$であり，z は増加する。結局 $z \to z^*$ になり，$V \to \frac{1}{f(z^*)}$ になる。すなわちその経済は１つしかない定常状態の輪郭（Unique steady-state configuration）の傾向がある。定常状態において雇用，産出物および資本ストックはすべて同じ率で成長する。それらの成長率のうちの一つが外生的に与えられれば，それは定常状態の成長を決定するのである。

第３図は経済的パラメーターが変化した場合，定常状態に如何に影響するかを示している。例えば高い貯蓄率は究極の定常状態の成長率に影響されない。それは n によって与えられる。つまり高い貯蓄率は s_1 から s_2 へより高い $\frac{s}{V}$ カーブを移動させる。n の水平軸との交点は左方へシフトする。このことは資本に対する雇用のより低い定常状態になることを意味しているのである。その経済が完全雇用を維持する限り，総雇用（Aggregate employment）は人口と労働に比例して与えられる。より高い貯蓄率による定常状態は雇用に対するより高い資本率をもつということであり，つまり所与の労働力を雇用するに，より多くの資本を要するということである。すなわち１労働者当りの産出物はより高く，資本１単位当りの産出物はより低くなるのである。

その経済が一定の失業率を維持すると仮定すれば，失業率が一定である限り，雇用は労働と同じ率 n で成長しなければならない。成長率は資本／産出物比 V が増加あるいは下落する場合，定常状態の成長率を上下させる。しかしこのような経路は，結局自然成長率 n において定常状態に落ち着く。そして資本／産出物比および１人当り産出物の究極の水準は，一定の貯蓄率に依存するのである。

次に人口成長率の変化は産出物に対する自然成長率の変化を得る。n の増加あるいは減少は第３図における水平線を上方あるいは下方へシフトさせることと同じである。結局すばやい人口成長率は資本１単位当り産出物および資本１単位当り雇用の高い定常状態の水準に対応する。つまり遅い人口成長率は資本１単位当り産出物および雇用を減少させる。より速い人口成長はその経済をわずかな資本集約的定常状態（Less capital-intensive steady-state level）に終るだろう。

第３図における $\frac{1}{V}$ カーブと $\frac{s}{V}$ カーブとの垂直の差は，資本１単位当りの消費を示している。つまり資本１単位当りの産出物から資本１単位当りの貯蓄を減じたものである。描かれている水平座標 n ラインは資本１単位当りの雇用である。これら２つの数値（Number）あるいは差（Distance）の比は，人口１人当りの消費

指数として使用することができる労働者１人当りの消費である。ある定常状態において，１人当り消費は資本１単位当りの産出物カーブ上の定常状態の点に対する縦軸上の点 n から引かれるラインの勾配によって表わされる。

いま自然成長率が一定を保ち，貯蓄率が変化するものとする。各々可能な定常状態において，１人当り消費は縦軸上の一定の点に固定されたラインの勾配の変化から読みとれる。非常に低い貯蓄率に対して，１人当り消費は非常に低い。その場合定常状態は右へと離れる状態である。つまりそれは労働に対する収穫逓減が考慮されているからである。また非常に高い貯蓄率に対しては，１人当り消費は非常に低く，そのケースでは定常状態が左へと離れており，それは資本に対する収穫逓減が考慮されていることを示唆している。

さて $\frac{1}{V}$ カーブの勾配は労働の限界生産物である。つまり資本ストック一定による労働の単位増加によって生じる産出物増加を意味している。その接線状態は１人当り消費に等しく，労働の限界生産物あるいは総消費に等しい賃金ビルである。しかし賃金ビルが総消費に等しいならば，総利潤は総投資に等しくなければならない。[6] それ故に定常状態において，総投資は資本ストック倍の成長率に等しく，また規模に関して収穫一定による競争的均衡において，総利潤は資本ストック倍の資本の限界生産物に等しいのである。

$\frac{1}{V}=\frac{Y}{K}=f(z)$ は資本１単位当りの産出物を表わしており，$z=\frac{L}{K}$ は資本１単位当りの雇用を示している。それ故に $\frac{f(z)}{z}$ は１人当り産出物を意味しているのである。定常状態において，資本ストックは自然成長率 n で成長し，貯蓄と投資は $\dot{K}=nK$ であり，１人当り貯蓄および投資は $\frac{nK}{L}=\frac{n}{z}$ である。それ故に１人当り消費は $\frac{f(z)-n}{z}$ である。このことは z に関する導関数がゼロである場合に，定常状態において極大になる。すなわち次のような式で表される。

$$\frac{n-\{f(z)-zf'(z)\}}{z^2}=0 \qquad (17)$$

ここで $f'(z)$ は雇用の限界生産物であり，$f(z)-zf'(z)$ は資本の限界生産物である。そして(17)式から $f(z)-zf'(z)=n$ が得られる。$f(z)-zf'(z)$ が資本の限界生産物であるということは，次の計算から知ることができる。

$$\frac{d}{dK}Kf(z)=f(z)-\frac{Kf'(z)}{K^2}=f\left[z-zf'(z)\right] \tag{18}$$

それ故に1人当り最大の消費による定常状態は，資本の限界生産物が自然成長率に等しい場合に生じる。その場合利潤総額は総貯蓄＝投資に等しい。つまり $K\{f(z)-zf'(z)\}=nK=\dot{K}$ である。従って貯蓄率は総産出物における利潤シェアである。

定常状態における1人当り消費は人口成長率増加ととも下落しなければならない。1人当り消費は資本1単位当り消費を資本1単位当り雇用で割った比率である。つまり分母は人口成長率ととも増加し，分子も増加する。分子は比例して分母よりも以上に増加する場合にのみ増加するのである。このことは資本1単位当りの雇用に関する資本1単位当り産出物の弾力性が1よりも大であるということを意味している。しかし資本一定による雇用1％の増加は必然的に1％よりも小さい産出物増加を生じる。定常状態において，より急速な人口成長を支持しなければならない経済においては，貯蓄が所与であるならば低い消費水準であるだろう。

ここでハロッド＝ドーマー（Harrod-Domar）の条件から，次のように計測することができる。

$$sf(z)=n \tag{19}$$

⒆式を n について微分すれば次のような式が得られる。

$$sf'(z)\frac{dz}{dn}=1 \quad or \quad \frac{dz}{dn}=\frac{1}{sf'(z)} \tag{20}$$

⒇式は明らかに高い n は定常状態においてより高い z で進行する。

定常状態における消費は1人当りの消費，つまり $\frac{f(z)-n}{z}$ であるから，この式を n で微分すれば，次のような式になる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dn}\left(\frac{f(z)-n}{z}\right) &= \frac{z\left\{f'(z)\frac{dz}{dn}-1\right\}-\left\{\left[f(z)-n\right]\frac{dz}{dz}\right\}}{z^2} \\
&= \frac{z\left(\frac{1}{s}-1\right)-\left\{f(z)-n\right\}\frac{1}{sf'(z)}}{z^2} = \frac{z\left(\frac{1}{s}-1\right)-\left\{f(z)-sf(z)\right\}\frac{1}{sf'(z)}}{z^2} \\
&= \frac{z(1-s)-(1-s)\frac{f(z)}{sf'(z)}}{z^2} \\
&= \frac{(1-s)}{z^2}\left\{z-\frac{f(z)}{sf'(z)}\right\}
\end{aligned} \tag{21}$$

[7]

(21)式は資本の限界生産物が正である限り，$\dfrac{zf(z)}{f'(z)}<1$ であるから，明らかに負であるということが，ハロッド＝ドーマー条件から証明することができる。

Ⅳ　ソローの技術進歩[8]

資本に対する雇用比率が定常状態において一定であることを考慮する。そして資本ストックは労働供給と同じ率で成長するものとする。資本／産出物比（K/Y）も一定であり，総産出物もまた雇用と同じ率で成長し，１人当り産出物は一定であるが，産出物および資本ストックともに雇用よりもすばやく成長することが要求されている。資本ストックが与えられたならば，雇用と産出物との間に明白な関係（Once-for-all relation）がある。そして規模に関する収穫一定の仮定は，資本１単位当りの雇用と資本１単位当りの産出物との関係に転換することができる。K/Y が一定である場合でさえも K/L は一定でなければならない。

技術進歩の導入はこのことを変化させる。つまり資本および産出物両者は時間を通じて雇用よりもすばやく成長する。連続的イノベーションは収穫逓減の効果を避け，このようなプロセスを停止させる。また規模に関する収穫逓増の場合も同様である。経済規模の一定の拡大（Steady enlargment）は収穫逓減を相殺し，資本および１人当り産出物の連続的上昇を可能にする。

技術進歩が労働と資本両者の増大であると仮定する。一定の貯蓄率あるいは定常状態の仮定は，産出物が自然単位（Natural unit）における資本と同じ率で成長することを要する。定常状態において資本と労働は効率単位（Efficiency units）において同じ率で成長するが，その場合規模に関して収穫一定のもとで産出物は，その共通比率（Common rate）で成長しなければならない。そこで産出物は自然単位の資本と効率単位の資本両者と同じ率で成長しなければならないとソローは述べている。

さて技術進歩が労働および資本の増大であると仮定されているのであるから，この場合の生産関数は次のような式で表わされる。

$$Y=F\left(e^{\alpha t}K,\ e^{\beta t}L\right)^{(9)} \tag{22}$$

ここで K および L は自然単位における資本と労働サービスの投入である。また α および β はパラメーターである。しかし資本の自然単位は $e^{\alpha t}$，つまり時間 t における資本サービスの効率単位を規定し，また労働の自然単位は $e^{\beta t}$，つまり時間 t における労働サービスの効率単位を規定している。

規模に関する収穫一定の条件のもとで，(22)式は次のように書き換えることができる。

$$Y=e^{\alpha t}KF\left\{1,\ e^{(\beta-\alpha)}\frac{L}{K}\right\} \tag{23}$$

それ故に(23)式は次のような式に置き換えられる。

$$\frac{1}{V}=e^{\alpha t}f\left\{e^{(\beta-\alpha)}z\right\} \tag{24}$$

ここで f は資本1単位当りの雇用の関数と同様に，資本1単位当りで与えられる生産性関数（Productivity function）である。一般に生産性関数は時間を通じてシフトする。

定義によって定常状態において V は一定であり，雇用は e^{nt} と同じ程度で成長し，資本および産出物もまた e^{gt} と同じ程度で成長する。[10] ここで g は産出物の自然成長率であり，他のパラメーターによって決定される。それ故に(24)式は $\frac{1}{V}$ によって次のような式に書き表わされる。

$$\frac{1}{V}=e^{\alpha t}f\left\{e^{(\beta-\alpha+n-g)^t}\right\}=e^{\alpha t}f\left(e^{ht}\right) \tag{25}$$

[11]

ここで $h=\beta-\alpha+n-g$ である。

いま $\alpha=0$ であると想定すれば，$f(e^{\alpha t})$ は一定である。このことは $f'>0$ であるから，$h=0$, あるいは $\beta-\alpha+n-g=\beta+n-g=0$ を意味しているから，このことは労働を増大させる技術進歩のケースである。また産出物の自然成長率は効率単位における雇用の成長率である。すなわち人口成長率および労働を増大させる技術進率の合計，つまり $n+\beta=g$ である。またこのことは $\alpha=0$ であるから，$\frac{1}{V}=f\left(e^{\beta t}z\right)$ および $e^{\beta t}z=e^{\beta t}\frac{L}{K}=\bar{z}$ は資本1単位当りの効率単位における雇用である。すなわち $\frac{1}{V}=f(\bar{z})$ であるから，生産関数は時間を通じて変化しないということである。

次に α がゼロでないケースを考える。つまりすべての t に対して $\frac{1}{V}=e^{\alpha t}f\left(e^{ht}\right)$ であるから，時間 t について微分すれば，[12] 次のような式になる。

$$\frac{n}{\alpha}=\frac{f\left(e^{ht}\right)}{e^{ht}f'\left(e^{ht}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{\alpha}{n}=\frac{e^{ht}f'\left(e^{ht}\right)}{f\left(e^{ht}\right)} \tag{26}$$

(26)式の左辺 $\dfrac{\alpha}{n}$ は一定であるから，e^{ht}を u とすれは，u はすべて正の値になる。

そこで $\dfrac{uf'(u)}{f(u)}$ を η とすれば，η は一定でなければならない。いま $f(u)=Au^{\eta}$ とおけば，(23)式の生産関数は次のような式になる。

$$Y=Ae^{\alpha t}K\left\{e^{(\beta-\alpha)t}\frac{L}{K}\right\}^{\eta}=A\left(e^{\alpha t}K\right)^{1-\eta}\left(e^{\beta t}L\right)^{\eta} \tag{27}$$

それ故に次のような式に書き換えられる。

$$Y=AK^{1-\eta}\left\{e^{\left(\beta+\frac{1-\eta}{\eta}\alpha\right)^{t}}L\right\}^{\eta} \tag{28}$$

(27)式はコブ・ダグラス関数（Cobb-Dauglas function）であり，この場合 η が一定であるならば，(28)式から技術進歩は $b+\dfrac{1-\eta}{\eta}\alpha$ 率であり，労働増大のケースと同様である。

$\dfrac{s}{V}$ は資本ストックの成長率である。第3図における定常状態の交点 z^{*} の左側において，資本ストックは効率単位における雇用よりももっとゆっくり成長する。その交点の右側において，資本ストックは資本単位当り効率単位における雇用よりも急速に成長する。結局，その経済は交点に向い，資本ストックおよび効率的雇用は同じ率で成長し，資本／産出物比は一定であり，つまり $s=Vg$ であり，その経済は定常状態にあるということを意味している。

定常状態において資本ストックは自然単位における雇用よりも急速に成長する。超過成長率（Excess rate of growth）は労働を増大する技術進歩率に等しく，資本／産出物比が一定であるから，1人当り産出物もまた技術進歩率で成長する。

また自然成長率は人口増加率と技術進歩率との合計である。貯蓄率の変化は自然成長率を変化させない。それは1人当り産出物および1人当り消費曲線を変化させる。これら両者は技術進歩率を上昇させる。このようにソローは上記2パラグラフで示したように結論づけているのである。

追　想

本巻は，故石田成夫総長兼理事長の追悼号として発刊されるということである。私にとって石田成夫学長という方が，ぴったりと符号している。昭和42年（1967）に本学園が創立され，4月から第1期生が入学し，広島経済大学がスタートしたのである。その時から30有余年学長と一教員との関係が続いたのである。おおよそ30年という時間の経過は長いようで短かかったように感じる。その時間の航跡を顧みれば，様々な絵模様となって，私の脳裏に映写される。それが人生航路といえるものかもしれないが，悔の残ることばかりが先に立つのである。

本学開学当時，この地は田園風景が残り，牧歌的雰囲気が充満し，静寂そのものが漂い，教育環境は言語に落ちなかった。田植が終り，初夏には蛙の合唱を聞き，小鳥の囀きも絶えることなく，われわれに伝え，緑豊かな森を背に，戦国武将の居城を頂くという地の利に恵まれていたのである。このような場所に大学設置に向って辛苦を重ねられ，信念岩を崩す努力が今日あるを築かせたのである。建物もわずかであり，生徒数も少なく，働く教職員も一握といえるものであった。産みの苦しみ，陣痛を考える時，ここが我慢の為所であり，本学の建学の精神“和を以て貴としと為す”に一団となっていたことは，学長の隠れた心情から滲み出るものを，教職員が感じていたからに他ならない。

そんな空気に満ちた学園で，今もなお私自身経済モデル分析に専念できることに感謝している。そして本巻でもモデル分析を記し，学長の追悼に手向けることができる喜びを感じているのである。本学創立以来10年を経て，久しく望んだ大学院が認可されるに至った。当時学部長であった奥田秋夫教授から，大学院申請の話を耳に挟み，私にとって最初の出版本が世に出た後であったので，文部省より，俗称㊇を受け，大学院が認可された時，表現は適切でないが新兵から上等兵に格上げされたことに意を強くした。私にとっては学長への一つの贈物，いな恩返しを感じていたのである。同時に一方では私自身不義理を持つことにもなった。ある方面から与えられた御厚情を断らねばならなかったからである。しかし許されるならばその時の不義理に答えたい気持で一杯である。

私がモデル分析に手を染める切っ掛けになったのは，故井関孝雄教授のアドバイスに依存している。さらに故小山満雄教授の師事を受け，故田村泰夫教授の授業にも参列させていただき，特に故水谷一雄教授には本学の集中講義に来られた時，寸暇を惜しまず手解きをいただいたことに感謝の意を表する次第である。かかる諸教授による熱意溢れる授与がなかったならば，私もモデル分析から手を引いていたかもしれない。

しかし種々なる力を与えられ，石田学長とともに30有余年微小なるものしかあり得ないけれども，本学が大学としての姿になり得たことは，私にとっても喜びであるが，彼岸の地に居住されている学長も喜んでおられることと確信している。けれども学長を退任され，総長兼理事長になられて逢う機会も稀であった。数年前本学の入試日に入試本部で拝顔した時，不吉な予感を覚えた。

　　久方に逢いし面影変りけり
　　　　早期胃癌を切除せしと

健康そのものであった石田成夫総長が，すばらしくきれいな顔付きであり，弱々しさが伝わった。一日も早く回復され，再び健康な姿で登校されることを祈っていた。スポーツ万能で情に厚い眼差を持った姿で，温厚な口調でもって話される言葉で語り合いたかったのである。すべては順風満帆ということはなく，遂に新しい世へと旅立たれた。

君死にたもうことなかれ

厳しき経営　今が大切

ありし日の健康で微笑まれた写真を眺めながら，何故？どうして？という言葉が繰り返されてならなかった。

現実に姿として見えないけれども，西方浄土の弥陀の蓮座で，常にわれわれを導いておられることを信じ，御冥福を祈りながら，何時の日か彼岸の地でお逢いし語合うことができることを楽しみに，擱筆させていただきます。

合　掌

(December 28, 2000)

注

(1) デビッド・ローマー著：堀雅博，岩成博夫，南条隆訳；上級マクロ経済学，日本評論社，1998年，PP. 10～14 を参照。

(2) (7)および(8)式は指数・対数関数を使用すれば得ることができる。例えば $y = logx$ を x で微分すれば $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x} = e^{y}$ で示される。

(3) デビッド・ローマー著：堀雅博，岩成博夫，南条隆訳；上級マクロ経済学，日本評論社，1998年，PP. 15～17 を参照。

(4) R.M. Solow; Growth Theory; An exposition, Oxford university press, 2000, PP. 16～28 を参照。

(5) 対数微分の導関数を求める公式から，$y = logx$ において，x で微分すれば，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{log\,x}{dx} = \dfrac{1}{x}$ となる。それ故に $dy = \dfrac{1}{x}dx$ が得られる。また $\dfrac{A}{B}$ の対数は $logA - logB$ になることを考慮すれば，(13)式が得られる。

(6) われわれは通常ケインジアンの単純な所得方程式 $Y = C(Y) + I(Y)$ から，$Y - C(Y) = I(Y)$ を得ることができる。いま資本が一定であるから，この場合の生産関数は $Y = Y(L)$ で示される。労働の限界生産物は賃金ビルに等しいのであるから，利潤 Π は $Y - C(Y) = I(Y)$ が得られる。

(7) (21)式において，$sf'(z)\dfrac{dz}{dn} = 1$ から $f'(z)\dfrac{dz}{dn} = \dfrac{1}{s}$，あるいは $\dfrac{dz}{dn} = \dfrac{1}{sf'(z)}$，および $\dfrac{f'(z) - n}{z}$ から $\{f(z) - n\}z$，また $n = sf(z)$ が考慮されている。

(8) R.M. Solow; Growth Theory; An exposition, Oxford university press, 2000, PP. 30～35 を参照。

(9) (22)式がこのような生産関数で示されることは，注(2)で示したと同様に考えることによって書き表わされるのである。

(10) 第Ⅱ節における(7)および(8)式によって理解することができるであろう。

(11) 第Ⅱ節における(7)および(8)式を生産関数に代入すれば，$Y = F(e^{gt}K,\ e^{nt}L)$ とおくことができ，(22)式に組み入れることによって，$Y = F(e^{(\alpha-g)t}K,\ e^{(\beta-n)t}L)$ となる。$\dfrac{1}{V} = \dfrac{Y}{K}$ であるから，このことによって(25)式が得られる。

(12) (26)式を求めるには，次のような指数微分法が使用されている。

方程式 $x=e^y$ の微分は $\dfrac{dx}{dy}=e^y$ になり， $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{e^y}=\dfrac{1}{x}$ となる。また方程式 $y=a^x$ の微分は $dy=\dfrac{d}{dx}\left(a^x\right)dx=a^x dx$ となる。

参 考 文 献

〔1〕デビッド・ローマー著；堀雅博，岩成博夫，南条隆訳；上級マクロ経済学，日本評論社，1998年。
〔2〕R.M. Solow; Growth Theory; An exposition, Oxford university Press, 1969.
〔3〕R.M. Solow; Growth Theory; An exposition, 2nd, ed. Oxford university Press, 2000.
〔4〕Thorvaldnr Gylfason; Principles of Economic Growth, Oxford university Press, 1999.
〔5〕R.F. Harrod; Towardo a Dynamic Economics, Macmillan, 1960.
〔6〕森井昭顕；ハロッド動学理論とハロッド・ドーマー成長論の概説，広島経済大学経済研究論集，第23巻第3号，2000年。