

弾性直列型2重倒立振子のモデリングと H^∞ 制御

神本和昭*・川辺尚志**

(平成15年9月12日受理)

Modeling and H^∞ Control for an Inverted-Double Pendulum System Consisting of Elastic Links Connected in Series

Kazuaki KAMIMOTO and Hishashi KAWABE

(Received Sep. 12, 2003)

Abstract

The stabilizing control techniques for an inverted-double pendulum system consisting of elastic links connected in series are investigated by employing a distributed-parameter modeling method taking the 2nd and 3rd vibration modes of the elastic beam as the residual modes, and designing the H^∞ controller with both frequency characteristics and integral ones based on the loop-shaped H^∞ control scheme.

It is found that the present design method is very convenient for such a flexible structure system having the $j\omega$ poles as a double pendulum system discussed here, and that the frequency-shaped H^∞ controller has not only the simultaneous suppression effect against the chattering and the spillover components, but also the precise cart positioning control effect without static error.

Furthermore, It is found that although the coupling effect of the different natural frequencies between two flexible beams makes the stabilization problem more difficult, even such a simple feedback controller using only the output signal based on the strain vibration on the upper elastic beam is possible in stabilizing the most unstable system.

Key Words: Inverted-Double Pendulum, Double Elastic Links, H^∞ Controller, Loop Shaping Design, Frequency Shaping, Distributed-Parameter Modeling, Spillover

1. 緒 言

不安定で非線形なプラントの身近な例として倒立振子系がある¹⁾。それを不安定平衡点近傍で線形化して安定化する問題は、適用制御則の性能検証の恰好の題材であり、これまで非常に多くの研究がなされている。しかしその大半の研究は、多重構造を含めて剛性リンク系の安定化や位置決めに関するものであり²⁾、スピルオーバーのような不安定励起要因を内在する柔性構造系での扱いは少ない³⁾。まして柔軟・多重倒立振子系での安定化問題は、多自由度かつ

不確かさや不安定要因の増加のため高難度の制御問題となり、報告例は極めて少ないように思われる⁴⁾。

本研究は、不安定要因の多い弾性梁同士で結合された直列型2重倒立振子系の安定化制御問題を、西村らの整定関数⁵⁾を用いた H^∞ 制御理論のロバスト性に注目して系の安定性や整定性、さらに誘起モードの制振性等との同時制御性を検討するものである。マルチ・モードを有する柔軟構造物系での H^∞ 制御の一般的設計法は、(残留)高次モード成分を不確かさに含めるが、本報で扱うような各梁の不確かさが連成する2重弾性倒立振子系での検討例は非常に

* 現ジャパンアウトソーシング㈱ (平成13年, 本学大学院機械システム工学専攻修了)

** 広島工業大学工学部知能機械工学科

少なく、 H^∞ 制御のロバスト安定性を検証するうえで意義がある。

本報では特に複数弾性梁の不確かさを上部弾性梁側のひずみ振動情報だけに注目して安定化制御設計したのが大きな特徴である。

入力端外乱を用いた混合感度問題^{5,6)}を適用し、下部弾性梁を含めて良好な整定性やスピルオーバー抑制効果をシミュレーション面より検証した。

2. 分布定数系モデリング

図.1 に弾性ビームが直列に結合された2重倒立振り子のモデルを示す。記号を以下に示す。

M_e : 台車系の等価質量 [kg]

D_e : 水平移動の等価減衰係数 [Ns/m]

G_e : 水平駆動の等価ゲイン定数 [N/V]

l_k : ビーム k の全長 [m]

m_k : ビーム k の質量 [kg]

ρ_k : ビーム k の線密度 [kg/m]

I_k : ビーム k の断面2次モーメント [m⁴]

E_k : ビーム k の縦弾性係数 [N/m²]

C_{mk} : ビーム k の内部減衰係数 [Ns/m]

d_k : ビーム k の厚さ [m]

$w(r_k, t)$: ビーム k のたわみ [m]

μ_k : 各支点に関する等価減衰係数 [Nms/rad]

θ_k : ビーム k の振れ中心角 [rad]

$\phi_k(r_k)$: ビーム k の固有関数 [-]

$X_{ki}(t)$: ビーム k のモード変数 [-]

ε_k : ビーム k のひずみ [-]

S : 台車の水平移動変位 [m]

u : 水平駆動に必要な制御入力 [V]

\mathbf{x}_{pk} : ビーム k の始点0から微小要素 dr_k までの位置

ベクトル (i_k, j_k): 各支点における直交座標系 ($k=1,2$)

各ビームの始点0から微小要素 dr_k までの位置ベクトルは

$$\mathbf{x}_{p1} = (r_1 + S \sin \theta_1) \mathbf{i}_1 - \{w(r_1, t) + S \cos \theta_1\} \mathbf{j}_1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{p2} = & r_2 \mathbf{i}_2 + \{S + l_1 \sin \theta_1\} (\sin \theta_{2a} \mathbf{i}_2 - \cos \theta_{2a} \mathbf{j}_2) \\ & - l_1 (1 - \cos \theta_1) (\cos \theta_{2a} \mathbf{i}_2 + \sin \theta_{2a} \mathbf{j}_2) - w(r_2, t) \mathbf{j}_2 \end{aligned} \quad (2)$$

と表現できる。ここで、各々の直交座標系 (i_k, j_k) は角速度と共に回転することから次式の関係が得られる。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{i}}_1 = -\dot{\theta}_1 \mathbf{j}_1, \dot{\mathbf{j}}_1 = \dot{\theta}_1 \mathbf{i}_1, \dot{r}_1 = 0 \\ \dot{\mathbf{i}}_2 = -\dot{\theta}_{2a} \mathbf{j}_2, \dot{\mathbf{j}}_2 = \dot{\theta}_{2a} \mathbf{i}_2, \dot{r}_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

したがって、(1), (2)式は(3)式を考慮し時間で2階微分することで

$$\ddot{\mathbf{x}}_{p1} = \{\ddot{S} \sin \theta_1 - \ddot{\theta}_1 w(r_1, t)\} \mathbf{i}_1 - \{r_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{w}(r_1, t) + \ddot{S} \cos \theta_1\} \mathbf{j}_1 \quad (4)$$

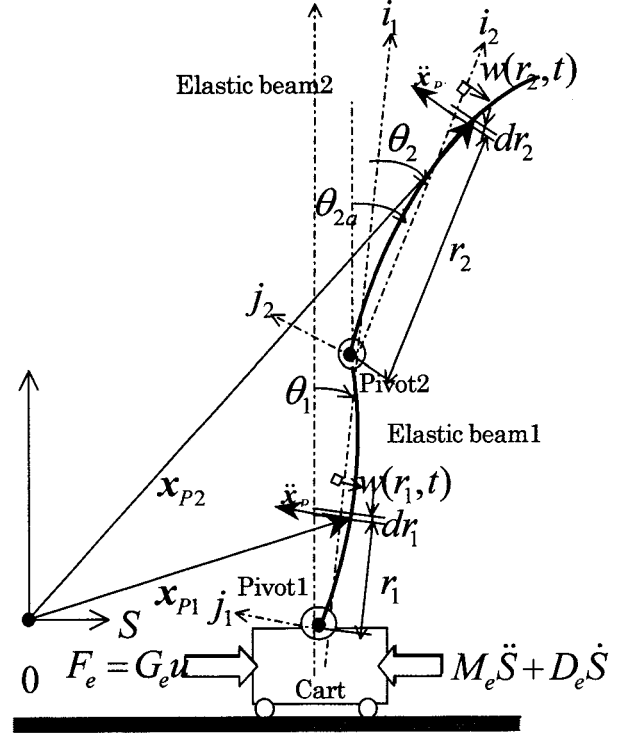


Fig.1 Schematic illustration for an inverted-double pendulum system consisting of an elastic beams supported by another elastic one

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_{p2} = & \{\ddot{S} \sin \theta_{2a} + l_1 \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_{2a} - \theta_1) - \ddot{w}(r_2, t) \theta_{2a}\} \mathbf{i}_2 \\ & - \{r_2 \ddot{\theta}_{2a} + \ddot{S} \cos \theta_{2a} + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_{2a}) + \ddot{w}(r_2, t)\} \mathbf{j}_2 \end{aligned} \quad (5)$$

となる。よって、ビームの伸び方向 (i_k) の運動はないと仮定することで各々の釣り合い式が以下に成り立つ。

水平方向の釣り合いから

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^{l_1} \{\ddot{S} + \{r_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{w}(r_1, t)\} \cos \theta_1\} dr_1 + \rho_2 \int_0^{l_2} \{\ddot{S} + \{r_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + \ddot{w}(r_2, t)\} \cos \theta_{2a}\} dr_2 + M_e \ddot{S} + D_e \dot{S} = G_e u \end{aligned} \quad (6)$$

支点1回りのモーメントの釣り合いから

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^{l_1} \{r_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{w}(r_1, t) + \ddot{S} \cos \theta_1\} dr_1 + \rho_1 g \int_0^{l_1} \{r_1 \sin \theta_1 + w(r_1, t) \cos \theta_1\} dr_1 \\ + \rho_2 \int_0^{l_2} \{r_2 + l_1 \cos \theta_2\} \{r_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \ddot{S} \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \ddot{w}(r_2, t)\} dr_2 \\ - \rho_2 g \int_0^{l_2} \{l_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + w(r_2, t) \cos(\theta_1 + \theta_2)\} dr_2 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

支点2回りのモーメントの釣り合いから

$$\rho_2 \int_0^{l_2} \{r_2 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_2) + \ddot{S} \cos(\theta_{12} + \theta_2) + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \ddot{w}(r_2, t)\} dr_2$$

$$-\rho_2 g \int_0^{l_2} \{r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + w(r_2, t) \cos(\theta_1 + \theta_2)\} dr_2 = 0 \quad (8)$$

ビーム 1 の微小要素の運動方程式として

$$\rho_1 \{r_1 \ddot{\theta}_1 + \ddot{w}(r_1, t) + \ddot{S} \cos \theta_1\} + E_1 I_1 \frac{\partial^4 w(r_1, t)}{\partial r_1^4} + C_{m1} I_1 \frac{\partial^5 w(r_1, t)}{\partial t \partial r_1^4} + \rho_1 g \sin \theta_1 = 0 \quad (9)$$

ビーム 2 の微小要素の運動方程式として

$$\rho_2 \{r_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \ddot{S} \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \ddot{w}(r_2, t)\} + E_2 I_2 \frac{\partial^4 w(r_2, t)}{\partial r_2^4} + C_{m2} I_2 \frac{\partial^5 w(r_2, t)}{\partial t \partial r_2^4} - \rho_2 g \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0 \quad (10)$$

となる。

次に、モード分離法によって有限次元近似を行う。各ビームのたわみ $w(r_k, t)$ はそれぞれ固有関数とモード変数を用いて

$$w(r_k, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(r_k) X_{ki}(t) \quad (11)$$

と展開できる。各ビームの境界条件としてビーム 1 は、両端で回転支持と仮定することで

$$\begin{cases} \phi_{1i}(0) = \phi_{1i}''(0) = 0 \\ \phi_{1i}(l_1) = \phi_{1i}''(l_1) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

となる。よって、(12)式から固有関数 $\phi_{1i}(r_1)$ は、固有値を $v_{1i} \equiv i\pi/l_1$ と近似することで

$$\phi_{1i}(r_1) = \frac{\sin v_{1i} r_1}{\sqrt{l_1}} \quad (13)$$

とする。また、ビーム 2 については、両ビームの結合部で回転支持とし先端部において自由と仮定し次式とする。

$$\begin{cases} \phi_{2i}''(0) = \phi_{2i}'(0) = \phi_{2i}(0) = 0 \\ \phi_{2i}''(l_2) = \phi_{2i}'''(l_2) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

よって、(14)式から固有関数 $\phi_{2i}(r_2)$ は、固有値を $v_{2i} \equiv (i+0.25)\pi/l_2$ と近似し

$$\phi_{2i}(r_2) = \frac{1}{\sqrt{l_2}} \left(\frac{\sinh v_{2i} r_2}{\sinh v_{2i} l_2} + \frac{\sin v_{2i} r_2}{\sin v_{2i} l_2} \right) \quad (15)$$

とする。

次に、(11)式を用いて(6)~(10)式をモード分離する。また、この運動は微小と考え非線形項は線形近似しビームの粘性摩擦 μ_k を考慮することで台車系の運動方程式は

$$\begin{aligned} (M_e + m_1 + m_2) \ddot{S} + \left(\frac{1}{2} m_1 l_1 + \frac{1}{2} m_2 l_2 + m_2 l_1 \right) \ddot{\theta}_1 \\ + \frac{1}{2} m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + \rho_1 \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{1i} \ddot{X}_{1i} \\ \rho_2 \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{2i} \ddot{X}_{2i} + D_e \dot{S} = G_e u \end{aligned} \quad (16)$$

となる。ビーム 1 の剛体モードの運動方程式は

$$\left(\frac{1}{2} m_1 l_1 + \frac{1}{2} m_2 l_2 + m_2 l_1 \right) \ddot{S} + \left(\frac{1}{3} m_1 l_1^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 + m_2 l_1^2 \right) \ddot{\theta}_1$$

$$\begin{aligned} + \left(\frac{1}{3} m_2 l_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \right) \ddot{\theta}_2 + \rho_1 \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{1i} \ddot{X}_{1i} + \rho_2 \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{2i} \ddot{X}_{2i} \\ - \left(\frac{1}{2} m_1 g l_1 + m_2 g l_1 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \right) \theta_1 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \theta_2 + \rho_1 g \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{1i} X_{1i} \\ - \rho_2 g \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{2i} X_{2i} + \mu_1 \dot{\theta}_1 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

となる。また、ビーム 2 の剛体モードの運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_2 l_2 \ddot{S} + \left(\frac{1}{3} m_2 l_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \right) \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \\ + \rho_2 \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{2i} \ddot{X}_{2i} - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \theta_1 \\ - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \theta_2 - \rho_2 g \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{2i} X_{2i} + \mu_2 \dot{\theta}_2 = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

となる。ビーム 1 の弾性モードの運動方程式は

$$\begin{aligned} \rho_1 \{r_1 \ddot{\theta}_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(r_1) \ddot{X}_{1i} + \ddot{S}\} + C_{m1} I_1 \sum_{i=1}^{\infty} v_{1i}^4 \phi_i(r_1) \dot{X}_{1i} \\ + E_1 I_1 \sum_{i=1}^{\infty} v_{1i}^4 \phi_i(r_1) X_{1i} - \rho_1 g \theta_1 = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

となり、ビーム 2 の弾性モードについては

$$\begin{aligned} \rho_2 \{r_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \ddot{S} + l_1 \ddot{\theta}_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(r_2) \ddot{X}_{2i}\} \\ + C_{m2} I_2 \sum_{i=1}^{\infty} v_{2i}^4 \phi_i(r_2) \dot{X}_{2i} \\ + E_2 I_2 \sum_{i=1}^{\infty} v_{2i}^4 \phi_i(r_2) X_{2i} - \rho_2 g (\theta_1 + \theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

となる。ただし、

$$\xi_{ki} = \int_0^{l_k} \phi_i(r_k) dr_k, \eta_{ki} = \int_0^{l_k} r_k \phi_i(r_k) dr_k, \gamma_{ki} = \int_0^{l_k} \phi_i(r_k) dr_k, \quad (k=1,2) \quad (21)$$

である。

続いて、各ビームの運動式(19)、(20)の両辺に $\phi_k(r_k)$ との内積をとり整理すると

$$\beta_{1i} \ddot{S} + \varphi_{1i} \ddot{\theta}_1 + \ddot{X}_{1i} + \omega_{1i}^2 X_{1i} + 2\zeta_{1i} \omega_{1i} \dot{X}_{1i} - \beta_{1i} g \theta_1 = 0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \beta_{2i} \ddot{S} + (\varphi_{2i} + l_1 \beta_{2i}) \ddot{\theta}_1 + \varphi_{2i} \ddot{\theta}_2 + \ddot{X}_{2i} + \omega_{2i}^2 X_{2i} \\ + 2\zeta_{2i} \omega_{2i} \dot{X}_{2i} - \beta_{2i} g (\theta_1 + \theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

ただし、

$$2\zeta_{ki} \omega_{ki} = C_{mk} I v_{ki}^4 / \rho_k, \beta_{ki} = \xi_{ki} / \gamma_{ki}, \varphi_{ki} = \eta_{ki} / \gamma_{ki} \quad (k=1,2) \quad (24)$$

である。ゆえに、(16)~(18)式および(22)、(23)式を弾性 n 次モードまでに近似すると状態変数 \mathbf{z} を

$$\mathbf{z} = [s \ \theta_1 \ \theta_2 \ X_{11} \cdots X_{1n} \ X_{21} \cdots X_{2n}]^T \quad (25)$$

とおくことで次式のように整理できる。

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{\Gamma} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{\Phi} \mathbf{z} = \mathbf{\Omega} \mathbf{u} \quad (26)$$

ただし、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 & O_{11} \cdots & O_{1n} & O_{21} \cdots & O_{2n} \\ J_2 & J_4 & J_5 & Q_{11} \cdots & Q_{1n} & P_1 \cdots & P_n \\ J_3 & J_5 & J_6 & 0 \cdots & 0 & Q_{21} \cdots & Q_{2n} \\ \beta_{11} & \varphi_{11} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{1n} & \varphi_{1n} & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \beta_{21} & R_1 & \varphi_{21} & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \beta_{2n} & R_n & \varphi_{2n} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{D_e, \mu_1, \mu_2, 2\zeta_{11}\omega_{11}, \dots, 2\zeta_{1n}\omega_{1n}, 2\zeta_{21}\omega_{21}, \dots, 2\zeta_{2n}\omega_{2n}\} \quad (28)$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & K_2 & S_{11} \cdots & S_{1n} & S_{21} \cdots & S_{2n} \\ 0 & K_2 & K_2 & 0 \cdots & 0 & S_{21} \cdots & S_{2n} \\ 0 & T_{11} & 0 & \omega_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & T_{1n} & 0 & 0 & \omega_{1n}^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & T_{21} & T_{21} & \vdots & \ddots & \omega_{21}^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & T_{2n} & T_{2n} & 0 & \cdots & 0 & \omega_{2n}^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{\Omega} = [G_e, 0, 0, 0, \dots, 0_{2n}]^T \quad (30)$$

$$\begin{cases} J_1 = M_e + m_1 + m_2, J_2 = \frac{1}{2} m_1 l_1 + \frac{1}{2} m_2 l_2 + m_2 l_1 \\ J_3 = \frac{1}{2} m_2 l_2, J_4 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 + m_2 l_1^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \\ J_5 = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2, J_6 = \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \\ O_{ki} = \rho_k \xi_{ki}, P_i = \rho_2 (l_1 \xi_{2i} + \eta_{2i}), Q_{ki} \\ = \rho_k \eta_{ki}, R_i = \varphi_{2i} + l_1 \beta_{2i} \\ K_1 = -\frac{1}{2} m_1 g l_1 - m_2 g l_1 - \frac{1}{2} m_2 g l_2, K_2 = -\frac{1}{2} m_2 g l_2 \\ S_{ki} = -\rho_k g \xi_{ki}, T_{ki} = -\beta_{ki} g \quad (k=1,2 \quad i=1,2, \dots, n) \end{cases} \quad (31)$$

したがって、状態変数 \mathbf{x} を

$$\mathbf{x} = [\mathbf{z} \quad \dot{\mathbf{z}}]^T \in \mathfrak{R}^{(3+2n)} \quad (32)$$

とおくことで状態方程式は

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (33)$$

ただし、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Phi} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(3+2n) \times (3+2n)}, \quad (34)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Omega} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(3+2n)}$$

となる。また、出力方程式については、台車位置 S 、各ビームの振れ角 θ_{pk} および各ビームのひずみ ε_k で

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (35)$$

ただし、

$$\mathbf{y} = [S \quad \theta_{p1} \quad \theta_{p2} \quad \varepsilon_2 \quad \dot{S} \quad \varepsilon_1]^T \quad (36)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \bar{\delta}_{11} \cdots & \bar{\delta}_{1n} & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & \bar{\delta}_{21} \cdots & \bar{\delta}_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & \delta_{21} \cdots & \delta_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{11} \cdots & \delta_{1n} & 0 \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times (2+2n)} \quad (37)$$

$$\delta_{ki} = \sum_{r=1}^n \frac{d_k}{2} \phi_i''(r_k) \Big|_{r_k=r_e}, \quad \bar{\delta}_{ki} = \sum_{r=1}^n \phi_i'(r_k) \Big|_{r_k=0} \quad (38)$$

とする。

3. 混合感度法による H^∞ 制御器設計

本報では、制御系設計を行うにあたってビーム 1 の弾性モードは考慮せずビーム 2 の弾性 1 次までを制御モードとする。その理由については以降の実験方法の部分で述べる。よって、制御モードの状態変数を \mathbf{x}_N 、残留モードの状態変数を \mathbf{x}_R とし以下の手法で状態方程式(33)と出力方程式(35)を低次元化する。

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_{NR} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{NR} \in \mathfrak{R}^{(6+4n) \times (6+4n)} \quad (39)$$

(39)式のような等式が成立する変換行列 \mathbf{T}_{NR} を用いて変数変換を行い

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_N \\ \dot{\mathbf{x}}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{NR11} & \mathbf{A}_{NR12} \\ \mathbf{A}_{NR21} & \mathbf{A}_{NR22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{NR1} \\ \mathbf{B}_{NR2} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{y}_N \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{NR11} & \mathbf{C}_{NR12} \\ \mathbf{C}_{NR21} & \mathbf{C}_{NR22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_R \end{bmatrix} \end{cases} \quad (40)$$

$$\mathbf{x}_N = [S \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad X_{21} \quad \dot{S} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{X}_{21}]^T \quad (41)$$

$$\mathbf{x}_R = [X_{11} \cdots X_{1n} \quad X_{22} \cdots X_{2n} \quad \dot{X}_{11} \cdots \dot{X}_{1n} \quad \dot{X}_{22} \cdots \dot{X}_{2n}]^T \quad (42)$$

とする。ここで、残留モード \mathbf{x}_R の定常値が

$$\mathbf{x}_R = -\mathbf{A}_{NR22}^{-1} \mathbf{A}_{NR21} \mathbf{x}_N - \mathbf{A}_{NR22}^{-1} \mathbf{B}_{NR2} \mathbf{u} \quad (43)$$

と表わされることから次式の低次元化方程式が得られる。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_N = \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_N = \mathbf{C}_N \mathbf{x}_N \end{cases} \quad (44)$$

ただし、

$$\begin{cases} \mathbf{A}_N = \mathbf{A}_{NR11} - \mathbf{A}_{NR12} \mathbf{A}_{NR22}^{-1} \mathbf{A}_{NR21} \in \mathfrak{R}^{8 \times 8} \\ \mathbf{B}_N = \mathbf{B}_{NR1} - \mathbf{A}_{NR12} \mathbf{A}_{NR22}^{-1} \mathbf{B}_{NR2} \in \mathfrak{R}^{8 \times 1} \\ \mathbf{C}_N = \mathbf{C}_{NR11} \in \mathfrak{R}^{5 \times 8} \end{cases} \quad (45)$$

次に、野波ら^{5,6)}の扱いを参考にした H^∞ 補償器設計法について述べる。図 2 は、入力端外乱を用いた乗法変動の混合感度問題として H^∞ 補償器を設計した制御系設計図を示す。本報で、乗法的変動を用いた理由については、加

法的変動より高く誤差が評価できるためである。ここで、 $P_N(s) = \{A_N, B_N, C_{N1,2}, 0\}$ は低次元化された制御対象を、 $K_\infty(s) = \{A_k, B_k, C_k, 0\}$ は H^∞ 補償器である。また、破線で囲まれた部分は一般化制御対象 $G(s) = \{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}\}$ である。 u は制御入力を、 w_1 および w_2 と w_3 は外部入力である。なお、外部入力 w_1 は、 $P(s)$ が $j\omega$ 極を持つことで、この極が $G_{21}(s)$ の不変零点となり標準 H^∞ 制御問題の可解条件を満たさないため w_1 を $P_N(s)$ の前に設け w から可制御となるようにする。また、外部入力 w_2, w_3 は、 D_{21} を行フルランクとするために導入する。 \hat{y} は実際の観測出力を \hat{z}_1 と \hat{z}_2 は制御量である。ここで $W_1(s) = \{A_{w1}, B_{w1}, C_{w1}, D_{w1}\}$ 、 $W_2(s) = \{A_{w2}, B_{w2}, C_{w2}, D_{w2}\}$ は重み行列である。 u は制御入力を、 w_1 および w_2 と w_3 は外部入力である。なお、外部入力 w_1 は、制御対象と制御器との間の極零点相殺を回避す

$$\|A(s)N(s)\|_\infty < 1 \quad (47)$$

なお、 $N(s)$ は図2中の a から b までの伝達関数

$$N(s) = K_{u\varepsilon_2}(s) \{I - K_{u\varepsilon_2}(s)P_{N\varepsilon_2u}(s)\}^{-1} P_{N\varepsilon_2u}(s) \quad (48)$$

である。また、 $u/\varepsilon_2 = K_{u\varepsilon_2}(s)$ は、 ε_2 から u までの伝達関数である。(47)式は結局

$$\|W_1(s)N(s)\|_\infty < 1 \quad (49)$$

次に、 n 次モードまでの制振問題を考える。図2において、 w_1 から \hat{z}_2 までの伝達関数は

$$M(s) = \{I - P_N(s)K(s)\}^{-1} P_N(s) \quad (50)$$

となる。(出力 \hat{S} については、制御器の次数を抑えるために定数重みで近似した) この関数 $M(s)$ は整定関数⁵⁾ と呼ばれ、このゲイン特性を低周波数域で低めれば、その周波数領域の極が左半平面遠くに移動し、速応性のあるレギュレータが設計できることが知られている^{7,8)}。このことは、

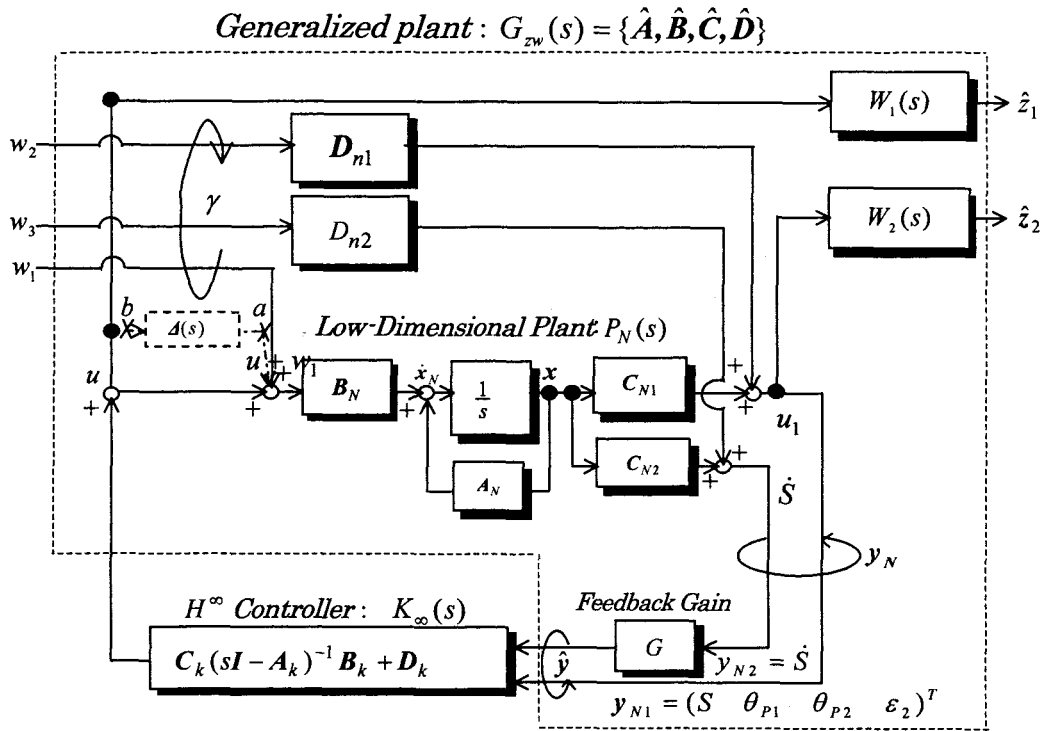


Fig.2 Overall design system based on the generalized plant G_{zw} and the H^∞ controller $K_\infty(s)$

る⁵⁾ ために設けた。また、外部入力 w_2, w_3 は、一般化制御対象 $G_{zw}(s)$ における \hat{D}_{21} を行フルランクとするために導入する。 \hat{y} は観測出力を、 \hat{z}_1 と \hat{z}_2 は制御量である。図2中の $W_1(s) = \{A_{w1}, B_{w1}, C_{w1}, D_{w1}\}$ は乗法誤差 $\Delta(s)$ の上界値の関数であり、 $W_2(s) = \{A_{w2}, B_{w2}, C_{w2}, D_{w2}\}$ は $P_N(s)$ の制振特性を規定する関数である。

ここで、梁2に対応する剰余モードを含めた伝達関数 $\varepsilon_2/u = P_{\varepsilon_2u}(s)$ とこの低次元化モデルの伝達関数 $\varepsilon_2/u = P_{N\varepsilon_2u}(s)$ との乗法的誤差 $\Delta(s)$ は

$$\Delta(s) = P_{N\varepsilon_2u}^{-1}(s) \{P_{\varepsilon_2u}(s) - P_{N\varepsilon_2u}(s)\} \quad (46)$$

を有するとき、ロバスト安定化条件は

前述の重み関数行列 $W_2(s)$ を低周波数域で高ゲインを持つように与える。すなわち

$$\|W_2(s)M(s)\|_\infty < \gamma \quad (51)$$

従って、(49)式と(51)式を同時に満足する評価関数は次式で与えられる。

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty = \left\| \frac{W_1(s)N(s)}{\gamma^{-1}W_2(s)M(s)} \right\|_\infty < 1 \quad (52)$$

これを満足する H^∞ 制御器 $K(s)$ の導出手順を簡単に述べる。ここで、図2から、入力 (w_1, w_2, w_3, u) と出力 ($\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{y}$) との関係一般化制御対象 $G_{zw}(s)$ の状態空間実現で表現する。

まず入力 $u \rightarrow \hat{z}_1$ までの信号は

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{w1} z_1 + B_{w1} u \\ \hat{z}_1 = C_{w1} z_1 + D_{w1} u \end{cases} \quad (53)$$

また $u \rightarrow u_1$ までの信号は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_N x + B_N (u + w_1) \\ u_1 &= C_{N1} x + D_{N1} w_2 \end{aligned} \quad (54)$$

さらに $u_1 \rightarrow \hat{z}_2$ までの信号は

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= A_{w2} z_2 + B_{w2} (C_{N1} x + D_{N1} w_2) \\ \hat{z}_2 &= C_{w2} z_2 + D_{w2} (C_{N1} x + D_{N1} w_2) \end{aligned} \quad (55)$$

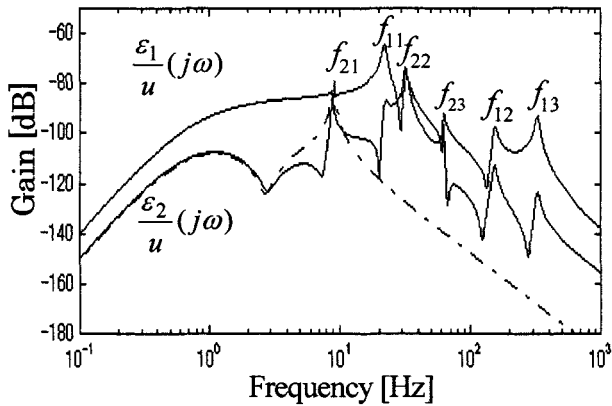


Fig.3 Gain characteristics of $\varepsilon_1/u(s)$ and $\varepsilon_2/u(s)$.

出力 y までの信号は

$$\begin{cases} y = \bar{C}_N x_N + \bar{D}_n \gamma \\ \gamma = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \bar{C}_N = \begin{bmatrix} C_{N1} \\ GC_{N2} \end{bmatrix}, \bar{D}_n = \begin{bmatrix} D_{n1} & 0_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & D_{n2} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (56)$$

従って

$$\hat{z} = [\hat{z}_1 \quad \hat{z}_2]^T, \hat{y} = [y_{N1} \quad y_{N2}]^T, w = [w_1 \quad w_2 \quad w_3]^T \quad (57)$$

とおくことで、一般化制御対象は、結局

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{w1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{w1} \\ 0 & A_{w2} & B_{w2} C_{N1} & 0 & B_{w2} D_{n1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_N & B_N & 0 & 0 & B_N \\ C_{w1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{w1} \\ 0 & C_{w2} & D_{w2} C_{N1} & D_{w2} & D_{n1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_N & 0 & D_{n1} & D_{n2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

となる。ただし、

$$\bar{D}_{n1} = \begin{bmatrix} D_{n1} \\ 0_{1 \times 4} \end{bmatrix}, \bar{D}_{n2} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 1} \\ D_{n2} \end{bmatrix} \quad (59)$$

ここで $D_{n1} = \sigma I \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $D_{n2} = \sigma$ は微小外乱 σ とし、 G はフィードバック係数である。よって、(58)式の一般化制御対象

を用いて Glover, Doyle らの解法によって近似解を得る。

$$u = K(s)y \quad (60)$$

$$K(s) = C_k (sI - A_k)^{-1} B_k + D_k \quad (61)$$

4. シミュレーション方法

本報では、両ビームの弾性モードを $n=3$ として(26)式を近似した運動式をシミュレーションモデルとして数値実験を行う。使用パラメータは、 $M_e=4.4$ [kg], $D_e=19.2$ [Ns/m], $G_e=18.4$ [N/V], $l_1=0.27$ [m], $m_1=0.031$ [kg], $\rho_1=0.113$ [kg/m], $\mu_1=3.027 \times 10^{-4}$ [Nms/rad], $I_1=1.25 \times 10^{-12}$ [m⁴], $E_1=206 \times 10^9$ [N/m²], $C_{m1}=1.001 \times 10^8$ [Ns/m], $d_1=0.001$ [m], $l_2=0.46$ [m], $m_2=0.027$ [kg], $\rho_2=0.059$ [kg/m], $\mu_2=5.109 \times 10^{-4}$ [Nms/rad], $I_2=1.56 \times 10^{-13}$ [m⁴], $E_2=206 \times 10^9$ [N/m²], $C_{m2}=8.552 \times 10^7$ [Ns/m], $d_2=0.0005$ [m]とした。また、各ビームのひずみゲージの取り付け位置はそれぞれ1次モードの腹にあたる $r_{e1} \cong 0.13$, $r_{e2} \cong 0.15$ [m]とした。図3は、各ビームの周波数応答である。実線が $n=3$ での各ビームの応答であり、破線が制御系設計モデル(44)式でのビーム2における応答を表す。ここで、ビームにおけるそれぞれの共振周波数はビーム1が、 $f_{11} \cong 22.1$ [Hz], $f_{12} \cong 152.6$ [Hz]でありビーム2については、 $f_{21} \cong 8.8$ [Hz], $f_{22} \cong 32.1$ [Hz]である。同図から言えることとして、ビーム1の共振周波数がビーム2の周波数応答にも現れていることが確認できる。 $f_{11} \cong 22.1$ [Hz], $f_{12} \cong 152.6$ [Hz]でありビーム2については、 $f_{21} \cong 8.8$ [Hz], $f_{22} \cong 32.1$ [Hz]である。同図から言えることとして、ビーム1の共振周波数がビーム2の周波数応答にも現れていることが確認できる。

したがって、厳密に考えた場合この系には異なる振動特性を持った不確かさが2つ存在するがより1次モードの共振点が高いビーム2の不確かさを乗法的変動 $\Delta(s)$ (46)式と捕らえることでビーム1のパラメータ変動に対してもロバスト安定化が計れると思われた。よって、ビーム2の1次モードはフィードバック補償を行い、ロバスト安定化を評価する重み関数 $W_1(s)$ は、乗法的変動 $\Delta(s)$ に対して沿うように重み関数を選定した。結果、4次の周波数重み関数 $W_1(s)$

$$W_1(s) = 15 \times \left(\frac{2\pi \times 8}{2\pi \times 22} \right)^4 \times \left\{ \frac{s^2 + (2 \times 0.7 \times 2\pi \times 22)s + (2\pi \times 22)^2}{s^2 + (2 \times 0.7 \times 2\pi \times 8)s + (2\pi \times 8)^2} \right\}^2 \quad (62)$$

を使用する。また、制振性を評価する周波数重み関数として

$$W_2(s) = \text{Blockdiag}[W_{21}(s) \quad W_{22}(s) \quad W_{23}(s) \quad W_{24}(s)] \quad (63)$$

を使用する。ただし、各周波数重み関数は制御器の次数を

なるべく小さくしたいためそれぞれ 2 次の周波数重み関数を選定し

$$W_{2i}(s) = k_{2i} \frac{(2\pi \times 8)^2}{s^2 + (2 \times 0.7 \times 2\pi \times 8)s + (2\pi \times 8)^2} \quad (64)$$

$(i=1 \dots 4)$

を用い, $k_{21}=50, k_{22}=30, k_{23}=30, k_{24}=100$ とした。その時の各重み関数(56), (60)式の周波数応答とビーム 2 の乗法的変動 $\Delta(s)$ (46)式の関係は図 4 になる。また, 台車の速度に関するフィードバック係数を $G=1$ とし, D_{21} を行フルランクにするために用いる係数 $\sigma=0.0001$ とした。以上の条件で(55)式の一般化制御対象を作成しサイバーネット社の Matlab ツールボックスのコマンド hinftopt を使用して γ -イタレーションを行い最適解()式を求めた。その結果, $\gamma=0.0039$ の 20 次の解が得られた。

$$K_\infty(s) = \frac{1}{D(s)} [Z_1(s) \ Z_2(s) \ Z_3(s) \ Z_4(s) \ Z_5(s)] \quad (65)$$

で与えられる⁸⁾。ただし,

$$D(s) = s^{20} + 4.231 \times 10^4 s^{19} + 2.358 \times 10^7 s^{18} + 6.576 \times 10^9 s^{17} + 1.209 \times 10^{12} s^{16} + 1.634 \times 10^{14} s^{15} + 1.718 \times 10^{16} s^{14} + 1.454 \times 10^{18} s^{13} + 1.01 \times 10^{20} s^{12} + 5.808 \times 10^{21} s^{11} + 2.773 \times 10^{23} s^{10} + 1.094 \times 10^{25} s^9 + 3.519 \times 10^{26} s^8 + 9.043 \times 10^{27} s^7 + 1.799 \times 10^{29} s^6 + 2.644 \times 10^{30} s^5 + 2.682 \times 10^{31} s^4 + 1.719 \times 10^{32} s^3 + 6.26 \times 10^{32} s^2 + 1.098 \times 10^{33} s + 6.208 \times 10^{32} \quad (66)$$

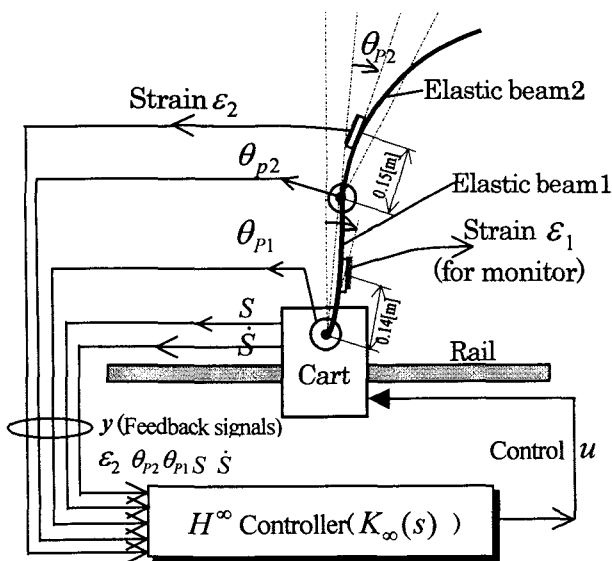


Fig.4 Designed control system for simulation

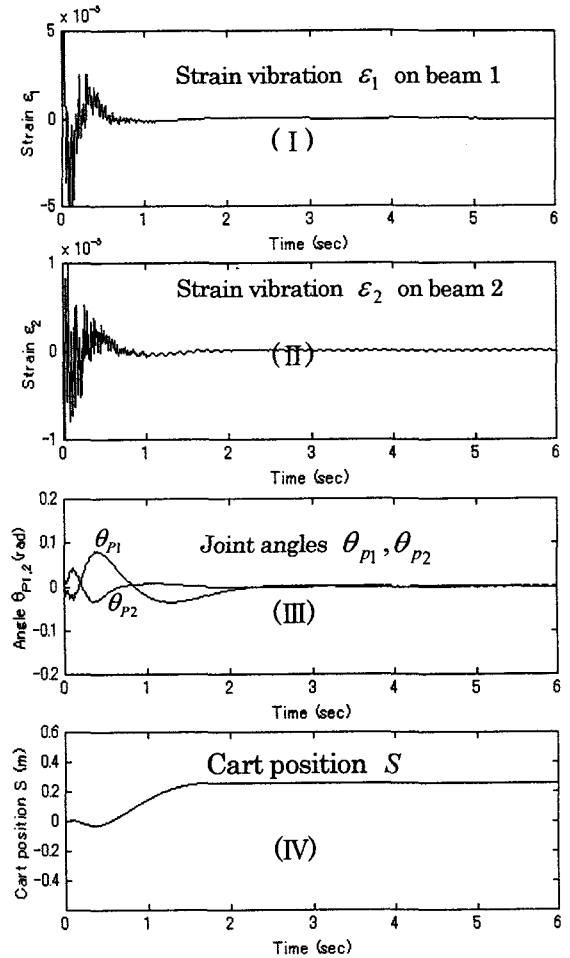


Fig.5 Simulation responses for the designed H^∞ control system under the applied cart-stepwise disturbance

$z_1(s), z_2(s), z_3(s), z_4(s), z_5(s)$ は省略⁹⁾する。

図 4 は, 上述の混合感度法で設計された H^∞ 制御器 $K_\infty(s)$ による 2 倒立振子系の制御系構成図を示す。

5. 結果および考察

図 5 は, 台車変位 $S=0.2[m]$ の定値外乱を与えた時のシミュレーションである。試しに, 高域遮断特性を持たせた LQ 制御を適用して見たがスピルオーバを起こすことを確認した。恐らくロバスタ安定化に対する補償が十分でないためであると考えられた。図は上からビーム 1 のひずみ振動 ϵ_1 (I), ビーム 2 のひずみ振動 ϵ_2 (II), 両ビームの出力角 θ_{p1} と θ_{p2} (III), 台車の水平移動距離 S (IV) をそれぞれ示す。同図から, 全ての出力が十分に速応性を有していることが分かる。すなわち, (63)式で選定した整定関数 $M(s)$ (50)式に対する周波数重み $W_2(s)$ が妥当であることが確認できる。

また, 図 3 で示したように本系は, 各ビームの振動モードが両ビームに絡み合うことが言えた。特にビーム 1 の振動モードがビーム 2 の運動に大きく影響を与え過大なパラメータ変動を起こすがスピルオーバを発生するまでに至っ

ていない。よって、ビーム 2 の残留成分のみを乗法的変動と捕らえて選定したロバスト安定化(48式)に対する周波数重み $W_1(s)$ (62式) が妥当であることが分かる。

6. 結 言

弾性ビームで結合された直列型 2 重倒立振子系の特徴として、各ビームの共振周波数がそれぞれのビームの周波数応答に反映されるので、本来不確かさが 2 つ存在する系である。しかし弾性 1 次モードの共振点がより低い、(上側)ビーム 2 の振動特性に着目してその不確かさを乗法的変動と捕らえて行うことで、(下側)ビーム 1 の剰余モードによるスピルオーバーにもロバストな制御が行えるかシミュレーションより検証し、以下の結論と課題を得た。

1. 各ビームの共振周波数が両ビームに現れることでの影響が制御の難易度をより大きくしている。しかし、ビーム 2 のひずみ振動のみをフィードバックした場合でもある程度の安定性は保てる。

2. 両ビームの振動が収束する時は、ビーム 2 が低周波の振動状態となった瞬間であったと同時に、ビーム 2 が高周波振動である状態では振動が抑制しにくい。

3. ビーム 2 をもう少し柔軟にし、弾性モードにおける

固有振動数に大きくめりはりをつけることでより安定化しやすい可能性がある。

参 考 文 献

- 1) 例えば日高編, 川辺 ほか: 機械力学 (振動の基礎から制御まで), 朝倉書店 (2000), 137-143.
- 2) 例えば川谷, 村田 ほか: 計測自動制御学会論文集, 33-8 (1997), 852-854.
- 3) 西村, 大貫, 戸谷, 野波: 日本機械学会論文集 (C), 59-565 (1993), 109-114.
- 4) 神本, 川辺: 日本機械学会論文集 (C), 68-668 (2002), 1133-1139.
- 5) 西村, 大貫, 野波, 戸谷: 計測自動制御学会論文集 32-7 (1996), 1035-1042.
- 6) 野波: MATLAB による制御系設計, 東京電機大学出版局 (1999), 133-134.
- 7) 美多: 計測自動制御学会論文集, 24-11 (1988), 1207-1209.
- 8) 野波: 機械学会講習会教材, 910-42 (1991), 21-32.
- 9) 神本, 川辺, 吉田: 日本機械学会論文集 (C), 70-689 (2004) (掲載決定).