

## $H_\infty$ 制御技術の制振制御系への応用

—特に標準  $H_\infty$  混合感度問題に基づく研究—

清尾和志\*・川辺尚志\*\*

(平成 8 年 9 月 9 日受理)

## An Application of the $H_\infty$ Control Technique to a Vibration Control System

—Especially of an Investigation Based on the  
Ordinary  $H_\infty$ -Mixed Sensitivity Problem—

Kazushi SEO and Hisashi KAWABE

(Received Sept. 9, 1996)

### Abstract

The ordinary  $H_\infty$ -mixed sensitivity problem is restricted to plants without  $j\omega$  poles, so that the stabilizability of  $(A, B_2)$  and the detectability of  $(A, C_2)$  are satisfied. However, in a real system, we sometimes face a design problem for plants to have  $j\omega$  poles.

The present paper solves a vibration control problem via Sugie's  $H_\infty$  approach to plants with  $j\omega$  poles.

**Key Words:**  $H_\infty$ -mixed sensitivity, Vibration Control,  $j\omega$  poles, Stabilizability, Detectability

### 1 結 言

望ましい過渡応答特性等を実現するのに有効な手段の一つとして、時間領域上で評価関数を考えた最適制御などが挙げられる。しかし、古典制御理論のように制御系の伝達関数(周波数特性)に注目することも、制御対象自身の不確かさや外乱等を考慮して安定化するという制御系設計にとって非常に重要なものである。 $H_\infty$  制御とは、周波数領域上での評価指数として  $H_\infty$  ノルムを導入して閉ループ伝達特性の周波数整形に主眼を置き、同時に時間領域的側面からも考えることで合理的な制御系の設計を目指すものである。

$H_\infty$  制御は Zames<sup>1)</sup> によって提案されてから 10 年以上になる。当初から一部の数学者や制御理論家に注目されていたが、近年は広く一般の研究者、技術者の

関心を集めるに至っている。その理由として考えられることは、 $H_\infty$  制御問題の一般的な定式化がなされ、ロバスト安定化や周波数領域におけるループ整形などの実用的に重要な問題が系統的に扱えること、従来の最適制御などと比べても技術計算用のソフトウェアが容易に入手可能なことから解を求める作業にさほど労力を必要としないで済むようになったこと、また、種々の応用例によりその有効性が実験レベルで確認されてきたことなどである。しかしながら、その最も代表的な設計法としてよく取り上げられる混合感度問題では、制御対象に虚軸上の極(以下、 $j\omega$  極と称す)が存在すると、制御対象に対する補償器が求解不能に陥るといふ深刻な状況が発生する。実際の制御系では、サーボ系などに代表されるように、しばしば制御対象が  $j\omega$  極を保有することから、何らかの改善策を考え

\* 広島工業大学大学院工学研究科機械システム工学専攻

\*\* 広島工業大学工学部機械工学科

なければならない。これについて、混合感度問題に限定した杉江<sup>2)</sup>、美多<sup>3)</sup>らの方法では、制御対象の  $j\omega$  極を様々なループ変形により移動させることでこれを解決できているとしている。

杉江らの方法は、実際の制御対象から  $j\omega$  極を抽出して分割し、 $w \rightarrow z$  までの伝達関数  $G_{zw}$  の形を変えないよう準等価的にループ変形を行った後、一般化制御対象を構成してできたシステム（以後、分割システムと称す）に対する補償器を求め、それを実際の一般化制御対象（以後、実システムと称す）の補償器として適用するものである。美多らの方法が等価的にループ変形し、拡張  $H_\infty$  制御問題として取り扱うのに対し、杉江らの方法は準等価的にループ変形し、標準  $H_\infty$  制御問題として取り扱っている点で大きく異なる。

本報告は、杉江らの方法に基づいて  $j\omega$  極を保有する非減衰振動系を制御対象として想定し、それに対する  $H_\infty$  補償器を求め、その制振制御効果をシミュレーション的に検討する。

## 2 理論及び設計法

### 2.1 $H_\infty$ 標準問題

一般化制御対象  $G(s)$  を

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & O & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & O \end{bmatrix} \quad (1)$$

とし、その状態空間表現が、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}w(t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

で与えられているとする。ここで、 $x \in R^n$ （一般化制御対象次数）、 $w \in R^{m_1}$ （外生信号）、 $u \in R^{m_2}$ （制御入力）、 $z \in R^{p_1}$ （制御量出力）、 $y \in R^{p_2}$ （観測出力）であり、補償器を  $K(s)$  とする。

$H_\infty$  標準問題とは、 $G(s)$  と  $K(s)$  による閉ループ系を内部安定し、 $w \rightarrow z$  までの伝達関数  $G_{zw}(s)$  に対して、

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty < 1 \quad (3)$$

となるような補償器  $K(s)$  を見つけることである。

### 2.2 $H_\infty$ 標準問題の仮定

$H_\infty$  標準問題を解くために、以下のような仮定をおく。

A1)  $(A, B_2)$  : 可安定

A2)  $\text{rank } D_{12}$  : 列フルランク

A3)  $\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$  : 列フルランク

A4)  $(C_2, A)$  : 可検出

A5)  $\text{rank } D_{21}$  : 行フルランク

A6)  $\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$  : 行フルランク

これらの仮定のなかで、A1) と A4) は閉ループ系の内部安定化に必要な不可欠なものである。他の仮定は、実際の制御対象や重み関数行列が虚軸上の極、零点を保有していなければ成立する。既存のソフトウェアのほとんどは上記の仮定が満たされていないので、これらの仮定が満たされるか否かは実際の制御系設計の際に十分に注意すべきものである。本報告では、表記簡略化のため、更に直達項に関して以下の仮定を追加する。

$$A7) D_{12} = \begin{bmatrix} O \\ I_{m_2} \end{bmatrix}, D_{21} = [O \quad I_{p_2}]$$

### 2.3 乗法変動出力端混合感度問題

混合感度問題は、加法変動と乗法変動、入力端と出力端との組み合わせにより4つのタイプに分類することができる。本報告で扱う混合感度問題は、図1に示すような乗法変動出力端混合感度問題とする。

ここで、 $P$  は制御対象、 $U$  はフリーパラメータ、 $W_S$  と  $W_T$  は重み関数である。図1から伝達関数  $G_{zw}$  は次式となる。

$$G_{zw} = \begin{bmatrix} W_S S \\ W_T T \end{bmatrix} \quad (4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} S &= (I + PK)^{-1} \\ T &= PK(I + PK)^{-1} \end{aligned} \quad (5)$$

であり、 $S$  を感度関数、 $T$  を相補感度関数と呼ぶ。

$P(s)$  が  $j\omega$  極を持つ場合の問題点は以下の通りである。出力端混合感度問題では加法変動、乗法変動にかかわらず  $y$  と  $w$  が同次元なので、 $P(s)$  の全ての極は  $G_{yw} = G_{21}$  の不変零点となり、仮定A6) が満たされない。また、入力端混合感度問題でも、 $u$  と  $z$  が同次元なので、 $P(s)$  の全ての極は  $G_{zu} = G_{12}$  の不変零点となり、仮定A3) が満たされない。

このような理由から、制御対象が  $j\omega$  極を持つ場合の混合感度問題は  $H_\infty$  標準問題とはならない。

### 2.4 制御対象が $j\omega$ 極を持つときの対処

#### 2.4.1 制御対象の分割

実際の制御対象  $P$  を次の仮定と条件に従い分割する。

i)  $P$  の入出力数は等しい。

ii)  $P = P_2 P_1$ ,  $P_2 = \frac{n(s)}{d(s)} I$  の形式にかける。

- iii)  $P_1$  は虚軸上に極も零点も持たない。
- iv)  $P_2$  の全ての極が ( $d(s)$  の根が) 虚軸上にあること。
- v)  $P_2$  は分母分子の多項式次数が等しいこと。  
( $n(s)$  の次数= $d(s)$  の次数)
- vi)  $P_2$  はスカラーと単位行列の積であること。

2.4.2  $W_S$  の変更

制御対象を分割しただけでは仮定A6) は満たされない。そこで、以下の条件に従い  $W_S$  を変更する。

- i)  $P_2$  との積  $W_S = \tilde{W}_S P_2$  とし、 $W_S$  に  $P$  の  $j\omega$  極を含ませる。
- ii)  $\tilde{W}_S \in RH_\infty$  と選ぶ。

2.4.3 分割システムの構成

以上のことから、 $(P_1, P_2, \tilde{W}_S, W_T, \hat{K}, U)$  で特徴づけられる分割システムを利用してループ変形を行うと、図1は、図2に示すような乗法変動出力端混合感度問題に変更される。

このようにシステムを構成すると、 $w \rightarrow z$  の伝達関数  $G_{zw}$  を変更することなく変形でき、A1) ~ A6) の仮定が全て満たされ、 $H_\infty$  標準問題となり補償器を求めることが可能になる。

2.5 評価関数の設定

評価関数として次式を導入する。

$$\|\Phi_{zw}(s)\|_\infty < \gamma \tag{6}$$

ここで、 $\gamma (>0)$  は設計パラメータである。評価関数導入の意義は、評価関数の  $H_\infty$  ノルムをどのくらい以下に抑えるかを  $\gamma$  という設計パラメータにより任意に指定できることにある。

2.6  $H_\infty$  標準問題の一般解

準備として、リカッチ方程式に関する記号を定義する。今、一般に  $A, Q, R$  を  $n \times n$  実定数行列とし、 $Q, R$  を対称行列とする。このとき、 $2n \times 2n$  のハミルトン行列  $H$  を、

$$H = \begin{bmatrix} A & R \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \tag{7}$$

と定義し、これに対応するリカッチ方程式

$$A^T X + XA + XRX - Q = 0 \tag{8}$$

の  $n \times n$  対称解  $X$  のうち、 $A + RX$  を安定 (全ての固有値の実部が負) とするものが存在するとき、これを式(7)の安定化解と呼び、

$$X = Ric\{H\} \tag{9}$$

と表記することにする。

以上の準備と、仮定A1) ~ A7) のもとで、 $H_\infty$  標準問題が可解であるための必要十分条件と、それを満たす補償器の集合は、次の定理で与えられる<sup>4)</sup>。

定理 1

仮定A1) ~ A7) のもとで、与えられた  $\gamma > 0$  と式(1)の一般化制御対象に対して  $H_\infty$  標準問題の解  $K(s)$  が存在するための必要十分条件は、

$$X = Ric\{H_X\}, \quad Y = Ric\{H_Y\} \tag{10}$$

が存在し、

$$X \geq 0, \quad Y \geq 0, \quad \lambda_{\max}(XY) < \gamma^2 \tag{11}$$

を満たすことである。ここで、 $\lambda_{\max}(\cdot)$  は行列の最大固有値を表し、

$$H_X = \begin{bmatrix} A - B_2 D_{12}^T C_1 & B_1 B_1^T / \gamma^2 - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 + C_1^T D_{12} D_{12}^T C_1 & -(A - B_2 D_{12}^T C_1)^T \end{bmatrix}$$

$$H_Y = \begin{bmatrix} (A - B_1 D_{21}^T C_2)^T & C_1^T C_1 / \gamma^2 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T + B_1 D_{21}^T D_{21} B_1^T & -(A - B_1 D_{21}^T C_2) \end{bmatrix} \tag{12}$$

である。また、上記条件が全て成立するとき、全ての補償器は

$$K(s) = \hat{K}_{11} + \hat{K}_{12} U (I_{p_2} - \hat{K}_{22} U)^{-1} \hat{K}_{21}$$

$$U(s) \in RH_\infty^{m_2 \times p_2} \tag{13}$$

$$\|U\|_\infty < \gamma$$

のようにフリーパラメータ  $U$  を用いて表現できる。ただし、 $\hat{K}_{ij}$  は次式より定まる。

$$K(s) = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & O & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & O \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\hat{K}_{ij}(s) = \hat{C}_i (sI_n - \hat{A}) \hat{B}_j + \hat{D}_{ij}, \quad (i, j=1, 2) \tag{15}$$

また、 $\hat{A} \sim \hat{D}_{21}$  等は以下で定義される。

$$\left. \begin{aligned} \hat{B}_1 &= B_1 D_{21}^T + Y C_2^T \\ \hat{B}_2 &= B_2 + Y C_1^T D_{12} / \gamma^2 \\ \hat{C}_1 &= -(D_{12}^T C_1 + B_2^T X) \\ &\quad (I_n - YX / \gamma^2)^{-1} \\ \hat{C}_2 &= -(C_2 + D_{21} B_1^T X / \gamma^2) \\ &\quad (I_n - YX / \gamma^2)^{-1} \\ \hat{D}_{12} &= I_{m_2} \\ \hat{D}_{21} &= I_{p_2} \\ \hat{A} &= (A - B_1 D_{21}^T C_2) + Y (C_1^T C_1 / \gamma^2 \\ &\quad - C_2^T C_2) + \hat{B}_2 \hat{C}_1 \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

この定理は、 $G(s)$  の状態空間データから定まる2つのリカッチ方程式の安定化解  $X, Y$  を求め、それらが半正定等の3つの条件式(11)を満たせば、与えられた  $H_\infty$  標準問題に対する安定化補償器が存在すること、およびそのような全ての補償器が式(13)の形式でフリーパラメータ  $U(s)$  を用いて記述できることを示している。特に  $U(s) = 0$  と選ぶとき、 $K(s) = \hat{K}_{11}(s)$  となり、中心解  $K_C$  と呼ばれている。この中心解の次数は、 $\hat{A}$  と  $A$  のサイズが同じであることが示す

ように一般化制御対象の次数  $n$  (即ち, 本来の制御対象および重み関数の次数の和) に等しいことがわかる。

### 3 準備

#### 3.1 制御対象モデルと評価関数の設定

次の  $j\omega$  極を持つ 1 入力 1 出力非減衰振動系の制御対象を考える。

$$P = \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s+j)(s-j)} \quad (17)$$

設計仕様は, 混合感度仕様 (低周波領域での低感度化と高周波領域でのロバスト安定化) を基本とし, 付加的な仕様としてロバストサーボ仕様 (制御対象のモデル化誤差がある場合にも目標値に定常偏差なく追従する特性) を考える。ロバストサーボ仕様の条件は, サーボ解 (補償器)  $K_S$  が  $K_S(0) = \infty$  or  $K_S^{-1}(0) = 0$  を満たし, 積分器を含むことである。フリーパラメータ  $U$  を以下のように選ぶと仕様を満たすサーボ補償器が得られる。

$$U(0) = \hat{K}_{S2}^{-1}(0) \quad (18)$$

本報告では, 中心解とサーボ解を導出して両者を比較することにする。

また, 次のような評価関数  $\|\Phi(s)\|$  を設定する。混合感度仕様に対して

$$\|\Phi(s)\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} W_S S \\ W_T T \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma \quad (19)$$

ロバストサーボ仕様に対して

$$\|\Phi(0)\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ W_T(0) \end{bmatrix} \right\| < \gamma \quad (20)$$

とする。また, 式(19)を変形して,

$$\left\| \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma \left\| \begin{bmatrix} W_S^{-1} \\ W_T^{-1} \end{bmatrix} \right\| \quad (21)$$

とすると, ボード線図上での考え方が明確になる。

#### 3.2 一般化制御対象の構成

まず, 重み関数  $W_S, W_T$  の設定をする。 $W_S$  には  $P$  の  $j\omega$  極を含ませ (2.4.2節参照),  $W_T$  は多項式として選び, システムの次数を抑える。

$$W_S = \frac{10}{s^2+1} \quad (22)$$

$$W_T = \frac{(s+1)^2}{100} \quad (23)$$

次に, 制御対象の分割を2.4.1節の手順に従い,  $P_1, P_2, \hat{W}_S$  を以下のように設定する。

$$P_1 = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

$$P_2 = \frac{(s+2)(s+3)}{s^2+1} \quad (24)$$

$$\hat{W}_S = \frac{10}{(s+2)(s+3)}$$

ここで, 実システムと分割システムを構成する伝達関数の状態空間表現が必要となるので, 図1から実システムを構成する各伝達関数の状態空間表現を,

$$P = \left[ \begin{array}{c|c} A_P & B_P \\ \hline C_P & O \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & -1 \mid 1 \\ \hline 1 & 0 \mid 0 \\ \hline 0 & 1 \mid 0 \end{array} \right]$$

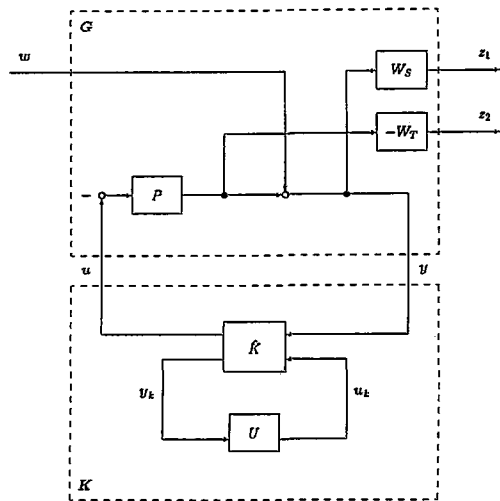


図1 乗法変動出力端混合感度問題のブロック線図

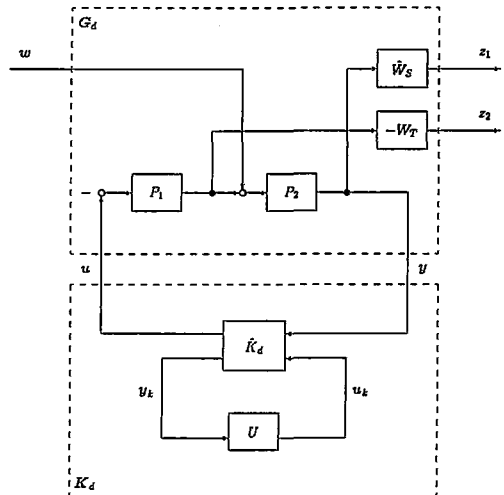


図2 分割システムによる乗法変動出力端混合感度問題

$$W_S = \left[ \begin{array}{c|cc} A_S & B_S & \\ \hline C_S & O & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 10 & 0 & \end{array} \right] \quad (25)$$

$$W_T P = \left[ \begin{array}{c|cc} A_P & B_P & \\ \hline C_T & D_T & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0.02 & 0 & 0.01 & \end{array} \right]$$

のように設定し、図2から分割システムを構成する各伝達関数の状態空間表現を、

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \left[ \begin{array}{c|cc} A_{P1} & B_{P1} & \\ \hline C_{P1} & O & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} -5 & -6 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \end{array} \right] \\ P_2 &= \left[ \begin{array}{c|cc} A_{P2} & B_{P2} & \\ \hline C_{P2} & D_{P2} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ \hline 5 & 5 & 1 & \end{array} \right] \\ \hat{W}_S P_2 &= \left[ \begin{array}{c|cc} A_{P2} & B_{P2} & \\ \hline C_{dS} & O & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 10 & 0 & \end{array} \right] \\ W_T P_1 &= \left[ \begin{array}{c|cc} A_{P1} & B_{P1} & \\ \hline C_{dT} & D_{dT} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} -5 & -6 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ \hline -0.03 & -0.05 & 0.01 & \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

と設定する。このとき図1に示す実システムの一般化制御対象  $G$  は、

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_S & -W_S P \\ 0 & W_T P \\ I & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

で与えられ、これに式(25)を代入して式(1)の形に整理すると、

$$\begin{aligned} G &= \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{ccc|cc} A_P & 0 & 0 & -B_P & \\ \hline B_S C_P & A_S & B_S & 0 & \\ \hline 0 & C_S & 0 & 0 & \\ \hline -C_T & 0 & 0 & D_T & \\ \hline C_P & 0 & I & 0 & \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{cccc|cc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (27) \end{aligned}$$

のようになる。この式(27)を仮定A6)に沿ってランク計算すると行フルランクとはならない。

また、図2に示す分割システムの一般化制御対象

$G_d$  は、

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{W}_S P_2 & -\hat{W}_S P_2 P_1 \\ 0 & W_T P_1 \\ P_2 & -P_2 P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

で与えられ、式(26)を代入して式(1)の形に整理すると、

$$\begin{aligned} G_d &= \left[ \begin{array}{c|cc} A_d & B_{d1} & B_{d2} \\ \hline C_{d1} & 0 & D_{d12} \\ C_{d2} & D_{d21} & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{ccc|cc} A_{P1} & 0 & 0 & -B_{P1} & \\ \hline B_{P2} C_{P1} & A_{P2} & B_{P2} & 0 & \\ \hline 0 & C_{dS} & 0 & 0 & \\ \hline -C_{dT} & 0 & 0 & D_{dT} & \\ \hline D_{P2} C_{P1} & C_{P2} & I & 0 & \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{cccc|cc|c} -5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.03 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ \hline 0 & 1 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (28) \end{aligned}$$

となる。しかし、 $u \rightarrow z$ の直達項  $D_{d12}$  に注目すると、 $D_{d12} = [0 \ 0.01]^T \neq [0 \ 1]^T$  となっており、仮定A7)に抵触しているため、以下のように制御入力関連項 ( $B_{d2}$ ,  $D_{d12}$ ) にスケーリング係数  $sclu$  をかけた分割システム  $G_{dscl}$  を作成し、これを回避する必要がある。

$$\begin{aligned} G_{dscl} &= sclu \cdot G_d \\ &= \left[ \begin{array}{c|cc} A_d & B_{d1} & B_{d2scl} \\ \hline C_{d1} & 0 & D_{d12scl} \\ C_{d2} & D_{d21} & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{cccc|cc|c} -5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.03 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (29) \end{aligned}$$

### 3.3 リカッチ方程式の解と補償器の算出

まず、式(12)に式(29)を代入してハミルトン行列を作成する。 $(\gamma = 0.6645)$ にて最適解

$$H_X = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & -10000 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2.27 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_Y = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 & 0 & 0.00204 & 0.00340 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0.00340 & -0.994 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & -5 & -25 & -25 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & -5 & -25 & 202 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(30)

ここで、式(30)の安定化解をもとめるために、有本-Potterの提唱するリカッチ方程式の代数的解法を用いる。この方法はハミルトン行列  $H_X$  と  $H_Y$  の固有値のうち、負のものに対応する固有ベクトルを上下同サイズで分割し、上側  $v_X$  と  $v_Y$ 、下側  $u_X$  と  $u_Y$  としたとき、これに対応するリカッチ方程式の解は、 $X = u_X v_X^{-1}$ 、 $Y = u_Y v_Y^{-1}$  で与えられるというものである。

技術計算ソフト *MATLAB* で有本-Potter法を実行すると以下に示す解を得る。

$$X = \begin{bmatrix} 0.6020 & 7.203 & 39.98 & 101.1 \\ 7.203 & 86.23 & 478.7 & 1211 \\ 39.98 & 478.7 & 2658 & 6725 \\ 101.1 & 1211 & 6725 & 17030 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(31)

また、 $X$ 、 $Y$ 、 $XY$  の固有値を調べると、

$$\lambda(X) : 0.0000799, 0.0107, 2.14, 19800$$

$$\lambda(Y) : 0, 0, 0, 0$$

$$\lambda_{\max}(XY) = 0 < \gamma^2$$

となり、式(11)を満たしていることが確認できる。式(16)に式(29)、(31)を代入して、式(14)の形に整理すると、式(29)の一般化制御対象に対する補償器  $K_{dsc}$  を得る。

$$K_{dsc} = \begin{bmatrix} -6022 & -72030 & -399800 & -1011000 & 0 & -100 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 60.17 & 720.3 & 3998 & 10110 & 0 & 1 \\ \hline -90.54 & -1085 & -6025 & -15240 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(32)

### 3.4 $H_\infty$ 制御系の構成

$H_\infty$  制御系の構成を行う前に様々な確認をしておく。

まず、補償器  $K$ 、感度関数  $S$ 、相補感度関数  $T$  の  $s$  領域表現についてであるが、式(5)、(13)、(14)、(18)から中心解  $K_C$ 、サーボ解  $K_S$  それぞれを用いたときの感度関数  $S$ 、相補感度関数  $T$  の  $s$  領域表現は次のようになる。

(中心解のとき)

$$K_C = \frac{399790(2.52883+s)}{(11.985+s)(6010.22+s)}$$

$$S_C = \frac{(11.9849+s)(6010.22+s)(1+s^2)}{(5.67673+s)(6010.23+s)(31.7433+6.29712s+s^2)}$$

$$T_C = \frac{399790(2.52883+s)}{(5.67673+s)(6010.23+s)(31.7433+6.29712s+s^2)}$$

$$U(s) = 0$$

(33)

(サーボ解のとき)

$$K_S = \frac{66.381(0.37233+s)(2.0596+s)}{s(12.062+s)}$$

$$S_S = -\frac{s(12.062+s)(1+s^2)}{(0.33427+s)(5.1457+s)(29.5945+6.5816s+s^2)}$$

$$T_S = \frac{66.381(0.37232+s)(2.0596+s)}{(0.33427+s)(5.1457+s)(29.5945+6.5816s+s^2)}$$

$$U(0) = K_{22}^{-1}(0) = 0.66381 < \gamma$$

(34)

このようにサーボ解を用いたときの補償器には積分器が含まれていることがわかる。

次に、制御対象と補償器からなる閉ループ系の極についてであるが、閉ループ系の極は  $(I+PK)^{-1}$  の極として与えられ、これを *DKA* 法により求めると以下のようなになる。

(中心解のとき)

$$-5.6767, -6010.2, -3.1486 \pm 4.6723$$

(サーボ解のとき)

$$-0.33427, -5.1457, -3.2908 \pm 4.3319$$

よって、どちらの場合も閉ループ系は安定であることを確認することができる。

また、式(21)の評価関数が満たされているかどうか

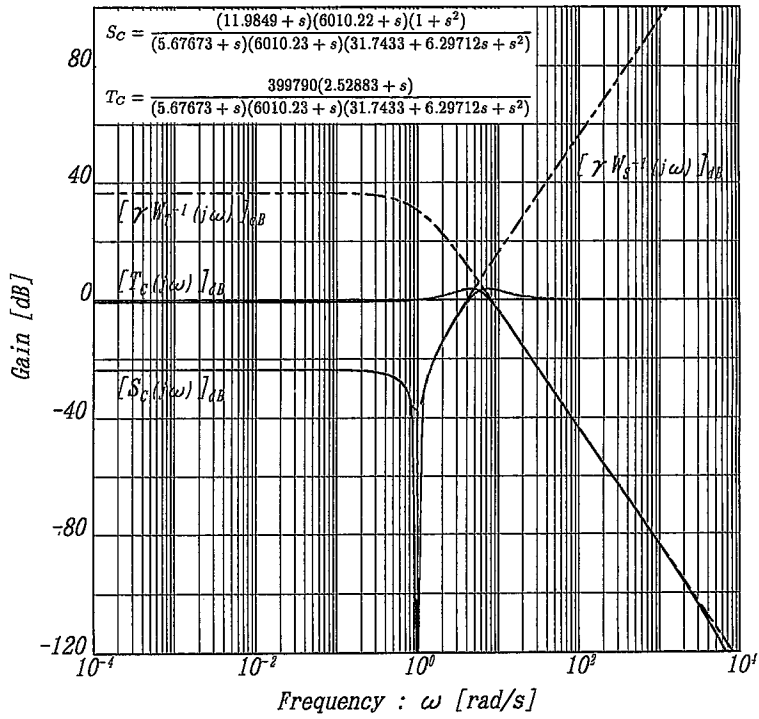


図3  $S_C$ ,  $T_C$ ,  $\gamma W_S^{-1}$ ,  $\gamma W_T^{-1}$  のボード線図 (中心解)

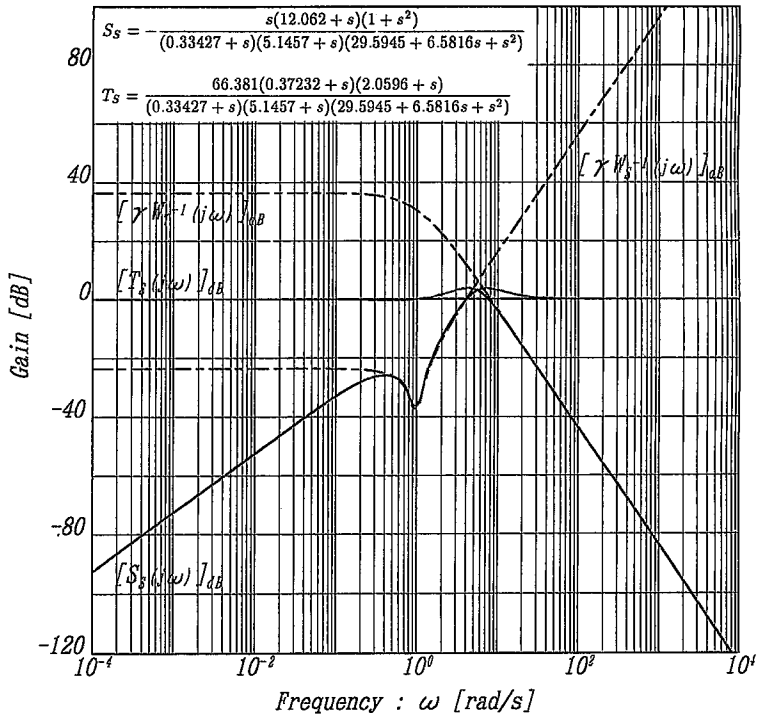


図4  $S_S$ ,  $T_S$ ,  $\gamma W_S^{-1}$ ,  $\gamma W_T^{-1}$  のボード線図 (サーボ解)

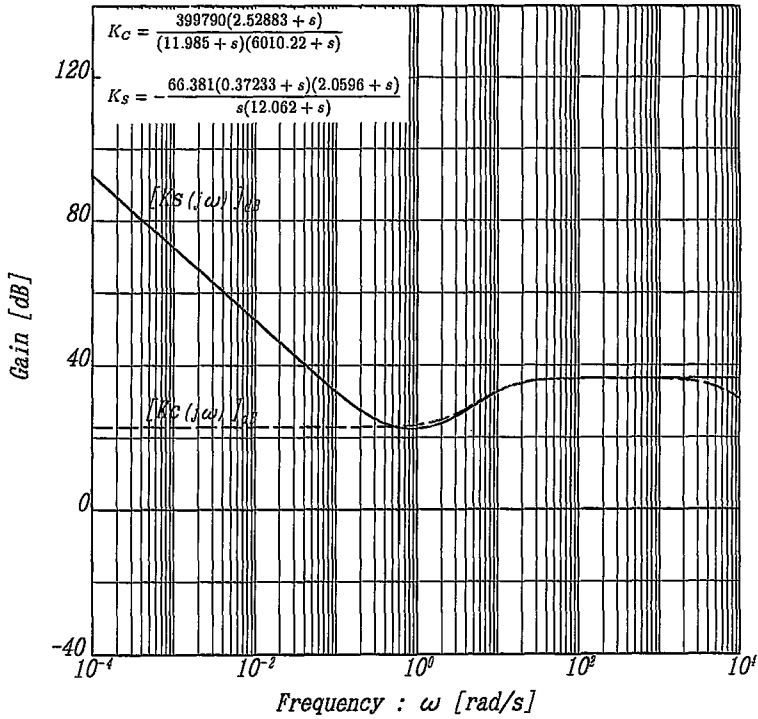


図5 補償器のボード線図 (中心解  $K_C$  とサーボ解  $K_S$ )

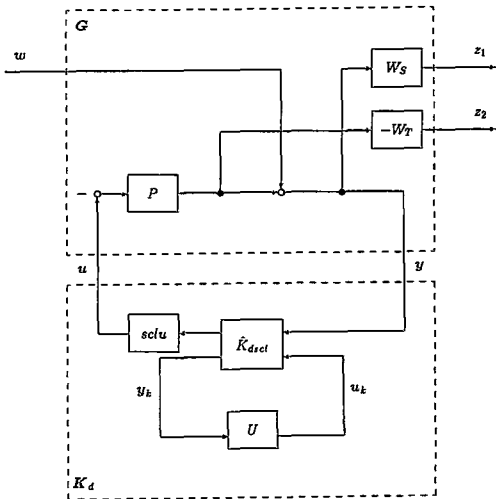


図6 再構成された  $H_\infty$  制御系

であるが、これは図3、図4のボード線図上で確認できる。図3は中心解、図4はサーボ解のときのもので、図5は各補償器のゲイン特性を比較したものである。

以上のようなことが確認できた後、 $H_\infty$  制御系を構成する。スケーリングを施した分割システム  $G_{dsc}$  に

より算出した補償器  $K_{dsc}$  を実システム  $G$  に適用するために、図1を若干変更して、図6のような  $H_\infty$  制御系を再構成する。なお、中心解を用いたときは、フリーパラメータループは消滅する。

## 4 シミュレーション結果と考察

### 4.1 シミュレーション結果

図6のシステムを離散時間システムに変換し、 $H_\infty$  制御系時間応答シミュレーションを行った結果を図7～図12に示す。但し、サンプリング周期 0.1(msec)、シミュレーション終了時間 5(sec)、一般化制御対象の初期値は振動体の初期変位のみを考慮して  $x_0^T = [0100]^T$  に固定するものとし、各補償器 (中心解  $K_C$ 、サーボ解  $K_S$ ) の性能や、外乱  $w$  が加わったときの原点への収束性などについて見るものである。

### 4.2 乗法的変動に対するロバスト性の検証

制御対象  $P$  に図13で示されるような出力側の乗法的モデル誤差<sup>2)</sup> を与え、ロバスト性について検討する。

ここで、 $P$  は公称モデル、 $\Delta P$  は変動、 $\tilde{P}$  は実際のモデルである。シミュレーションでは、 $\tilde{P}$ 、 $\Delta P$  を以下のように設定した。



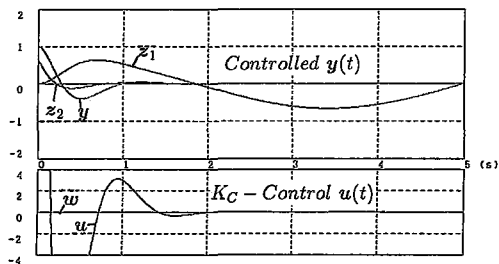


図7 中心解  $K_C$  による制御応答 (外乱  $w=0$ )

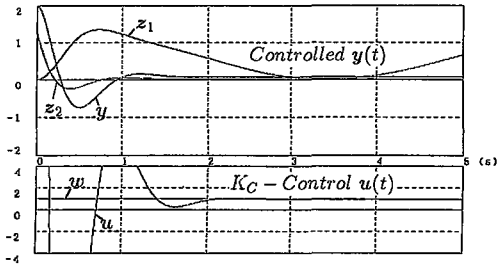


図8 中心解  $K_C$  による制御応答 (外乱  $w=1:\text{Step}$ )

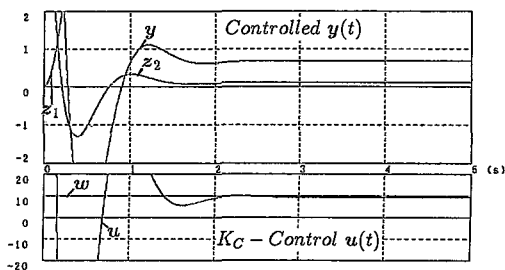


図9 中心解  $K_C$  による制御応答 (外乱  $w=10:\text{Step}$ )

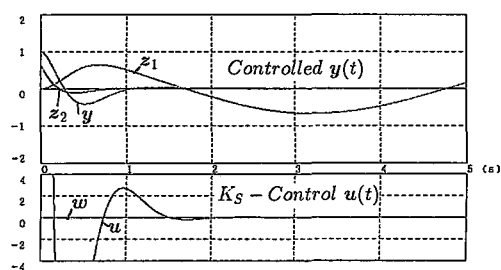


図10 サーボ解  $K_S$  による制御応答 (外乱  $w=0$ )

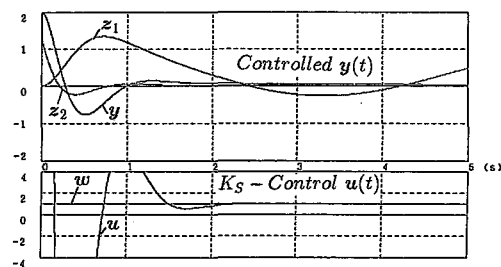


図11 サーボ解  $K_S$  による制御応答 (外乱  $w=1:\text{Step}$ )

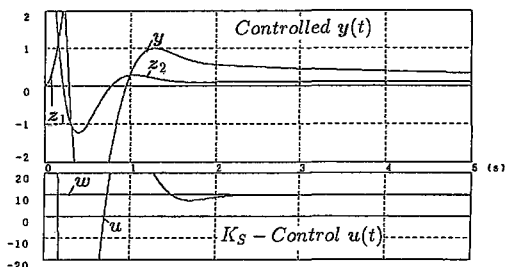


図12 サーボ解  $K_S$  による制御応答 (外乱  $w=10:\text{Step}$ )

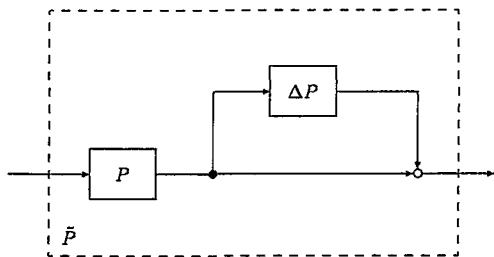


図13 出力側の乗法的モデル誤差表現

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \\ \Delta P &= \frac{(\omega^2 - 1)s^2}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (35)$$

シミュレーション条件は基本的に4.1節と同じとす

るが、外乱  $w$  は加えず、補償器と重み関数などは変更しないものとし、専ら  $\omega^2=1$  から  $\omega^2=10$  へとパラメータを変化させることでロバスト性を検証する。図14と図15に  $K_C$  と  $K_S$  補償器を用いた場合の制御応答をそれぞれ示す。

### 4.3 考察

まず、中心解  $K_C$  とサーボ解  $K_S$  についてであるが、図7～図12を通して見ると、外乱  $w$  が生じていないときの両補償器の差異は顕著ではなく、生じたときに初めてその差異が大きく現れ、サーボ解  $K_S$  を用いたときのほうが特性がよいことが確認できる。これは言うまでもなく  $K_S$  に定常偏差を解消する積分器を含んでいるからであり、積分器を含まない  $K_C$  ではその外乱の大きさに比例して定常偏差が残る。このことは、

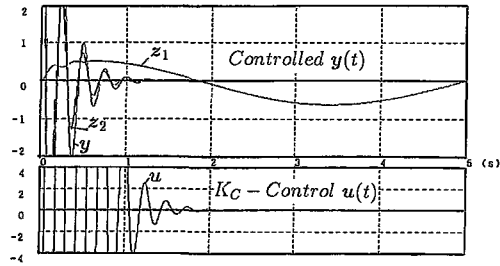


図14 パラメータ変動系 ( $\omega^2=10$ ) での  $K_C$  制御応答

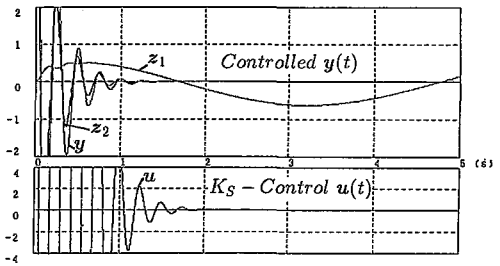


図15 パラメータ変動系 ( $\omega^2=10$ ) での  $K_S$  制御応答

両補償器のゲイン特性からも言える。図5のボード線図を見ると、ほぼ全周波数領域で  $K_S$  のゲインが  $K_C$  のゲインを上回り、 $K_S$  の方が総じて特性の良いことがわかる。また、混合感度仕様を満たしているので問題は無い。

次に、外乱  $w$  の大きさについてであるが、 $w=10$  以上のステップ入力も試してみたが、 $K_C$  の方は比例して定常偏差が残るが、 $K_S$  の方は若干収束時間が遅れるだけで定常偏差は時間と共に解消することを確認した。

さらに、乗法的変動に対するロバスト性についてであるが、図14、図15を通してみると、 $K_C$ 、 $K_S$  に関係なく原点に収束することがわかる。但し、 $\omega^2$  の値が大きくなるにつれ、その応答波形に高周波振動を伴うことがわかる。これは、式(35)の変動  $\Delta P$  による影響が、制御対象モデル  $\tilde{P}$  の振動性に関する部分に現れたからである。

## 5 総括

- 1) 中心解  $K_C$  とサーボ解  $K_S$  を比較したとき、低感度化とロバスト安定化特性については  $K_S$  の方が良好な特性 (ほぼ全周波数領域において  $K_C$  よりハイゲインを実現している) を示す。
- 2)  $H_\infty$  制御系に影響を及ぼす要因がなければ、中心解  $K_C$  とサーボ解  $K_S$  の差異はそれほど顕著ではない。
- 3) 実システムから直接補償器を求めることができないければ、 $j\omega$  極を制御対象から抽出し、 $w \rightarrow z$  までの伝達関数  $G_{zw}$  の形を変えることなくループ変形を行い、分割システムを構成することで、間接的に補償器を求めることが可能である。

4) 評価関数  $\|\Phi\|$  と設計パラメータとして調整係数  $\gamma$  を導入することで、 $H_\infty$  ノルム上で柔軟な評価と補償器の設計が可能となる。

5)  $H_\infty$  問題の存在条件を満たしていないとき再度  $\gamma$  を変更して計算する必要があるが、美多方式では一般化制御対象の作成ステップまで戻り再計算を必要とするが、杉江方式では、ハミルトン行列作成ステップに戻って再計算するだけでよく、効率的に補償器を求めるステップまで到達できる。

## 文献

- 1) G. Zames: Feedback and Optimal Sensitivity, Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms and Approximate Inverses, IEEE Trans. on Automatic Control, AC36-2, 585/601 (1981).
- 2) 杉江俊治, 前田肇, システム制御情報ライブラリー 3 (アドバンスド制御のためのシステム制御理論), 朝倉書店 (1992).
- 3) T. Mita:  $H_\infty$  Control for Motion Control, 日本シミュレーション学会第14回シミュレーションテクノロジー・コンファレンス, 19/24 (1995).
- 4) J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis: State-Space Formula for All Stabilizing Controllers that Satisfy An  $H_\infty$ -norm Bound and Relations to Risk Sensitivity, Systems & Control Letters, 11-2, 167/172 (1988).
- 5) 細江繁幸, 荒木光彦, システム制御情報ライブラリー10制御系設計— $H_\infty$  制御とその応用—, 76/79, 朝倉書店 (1995).

**要 旨：**

対  $(A, B_2)$  の可安定性, 対  $(A, C_2)$  の可検出性を満たすために, 標準  $H_{\infty}$  混合感度問題は制御対象に  $j\omega$  極を含まない場合に限定されている。しかしながら, 実際の系においては  $j\omega$  極を持つ制御対象に対する設計問題にしばしば直面する。

本論文は, 制御対象に  $j\omega$  極がある場合の杉江の  $H_{\infty}$  制御設計の手法を用いて, 制振制御問題を解くものである。

**Key Words:**  $H_{\infty}$  混合感度, 制振制御,  $j\omega$  極, 可安定性, 可検出性