

## ハイブリッド型ポテンシャルエネルギーの原理による 立体骨組構造解析法に関する研究

高松隆夫\*・松尾 彰\*\*  
椋代仁朗\*\*\*・立石直弘\*\*\*\*

(平成7年9月29日受理)

### Analytical Methods of Space Framed Structures by Use of Principle of Hybrid Potential Energy

Takao TAKAMATSU, Akira MATSUO,  
Yoshiro MUKUDAI and Naohiro TATEISHI

(Received Sept. 29, 1995)

#### Abstract

This paper describes that the governing equations for the numerical analysis of space framed structures can be derived on the basis of the principle of hybrid potential energy and that this procedure can be applied for the analysis of the structures with beam-to-column connections considered as rigid areas. The following conclusions were obtained.

1) The necessary conditions for the analysis of the structures, that is, the equilibrium equations at the nodes, the compatibility conditions of the nodes and the relations between forces and displacements at both ends of the elements, can be derived from the stationary conditions for the functional of the principle.

2) In the case of the analysis of the structures with the rigid areas, the necessary conditions can be obtained by the stationary conditions of the functional expressed by the additional terms of potentials of end shearing forces with respect to rigid rotations about the node.

**Key Words:** principle of hybrid potential energy, FEM, space framed structure, rigid area

#### 1. はじめに

地震水平力を受ける鋼構造において柱はり接合部の変形は無視できないものである。そのために、今までに種々の方法を用いて柱はり接合部の変形を考慮した

平面骨組の構造解析が行われてきた<sup>1)</sup>。しかし、通常の立体骨組の構造解析においては、柱はり接合部を剛な節点と見なした方法が用いられており<sup>2)</sup>、柱はり接合部の変形を考慮した立体骨組構造解析についてはほとんど行われていない。

\* 広島工業大学工学部土木工学科

\*\* 広島大学工学部第四類

\*\*\* 広島工業大学環境学部環境デザイン学科

\*\*\*\* 広島工業大学大学院工学研究科土木工学専攻

そこで、本報告では、種々の接合部問題を統一的に取り扱うことができるハイブリッド型ポテンシャルエネルギーの原理を立体骨組構造解析に適用することを試みる。有限要素法において要素境界上における変位の連続条件を緩和するために開発されたハイブリッド法の中のハイブリッド型ポテンシャルエネルギーの原理<sup>3)</sup>は、骨組構造解析における節点を要素境界と同一に取り扱うことにすれば柱はり接合部の変形を考慮した骨組解析に適用可能となる。筆者等は、すでに、ハイブリッド型ポテンシャルエネルギーの原理に基づく平面骨組モデルを誘導し、種々の接合部問題に適用できることを報告している<sup>4)</sup>。本報告においては、この手法を拡張して立体骨組モデルの誘導を行う。誘導された汎関数に種々の接合部問題に対応した補正項を付加するのみで容易にそれぞれの問題に関する新しい立体骨組モデルを誘導できる。

すなわち、ハイブリッド型変分原理は次のような利点を有している。1) 種々の接合部の変形に関するエネルギーは各々材端力の関数として簡潔に表現できる。2) 変位法において、幾何学的考察から求めなければならない変位の適合条件が、ハイブリッド法においては、材端力に関する停留条件から直接的に求められる。3) 2種類以上の接合部の変形を同一の定式化の基に統一的に取り扱うことができる。

本報告においては、新しい立体骨組モデルとして接合部問題として最も扱いやすい剛域を考慮した立体骨組モデルの基礎式を誘導する。このモデルは今後接合部パネルのせん断変形等を考慮する場合に併せて適用しなければならない重要なものである。また、既存の立体骨組構造解析用プログラム<sup>2)</sup>に若干の修正を加えることにより剛域を考慮した骨組解析ができることを示す。更に、本解析を用いた解析例も併せて示すことにする。

## 2. 解 析 法

### 2.1 基礎変分原理

ハイブリッド型ポテンシャルエネルギーの原理を用いて、立体骨組の構造解析に必要な基礎式の誘導を行う。解析上の基本的な仮定は、最小ポテンシャルエネルギーの原理を用いる場合とほとんど同じである。従って、そのまま準用するが、いくつかの重要なもののみを以下に記す。

a) 1つの要素内では断面定数(断面積, 断面二次モーメント, ねじり定数), 及び, ヤング係数, せん断弾性係数は、一様とする。また、応力度とひずみ度

との関係は、線形弾性とする。

b) 外力はすべて節点に作用する集中荷重とする。

c) 変位の境界条件は、節点にのみ適用される。

次に、3次元連続体の解析のために導かれたハイブリッド型ポテンシャルエネルギーの原理の汎関数を、立体骨組の汎関数に書き直す際に、注意すべき点を以下に記す。

a) ハイブリッド法では、要素境界上でいくつかの変数が定義される。そこで、要素境界の定義が重要となる。連続体では、隣接する2つの要素の境界面を要素境界と考えるが、骨組構造では、各要素は節点を介して接続されるので、各節点が要素境界と見なされる。

b) 連続体では、各々の変数は全体座標系で統一的に定義されるのが普通であるが、骨組解析では、まず、各要素ごとに定義された要素座標系を用いて各変数を表し、続いて、座標変換マトリックスにより全体座標系に変換する。隣接する要素との連続性を考慮する必要がなく、各要素で独立に選んで差し支えない変数は、要素座標系のみで表せばよい。

以上の仮定、及び、注意すべき点を考慮すれば、立体骨組構造解析に関するハイブリッド型ポテンシャルエネルギーの原理のための汎関数  $\Pi_{PH}$  は、次式で与えられる。(図1参照)

$$\Pi_{PH} = \sum_i [ \int_i A(u_i) dx - \{ \lambda \}^T \{ u - \mu \} ] - \sum_{\alpha n} \bar{P}_i d_i - \sum_{\alpha n} P_i (d_i - \bar{d}_i) \quad (1)$$

ここに、

$i=1, 2, 3, 4, 5, 6$

$u_i$ : 要素内の任意の変位

$$\{ u \}^T = [ u_1^{(1)} \ u_2^{(1)} \ u_3^{(1)} \ u_4^{(1)} \ u_5^{(1)} \ u_6^{(1)} \ u_1^{(2)} \ u_2^{(2)} \ u_3^{(2)} \ u_4^{(2)} \ u_5^{(2)} \ u_6^{(2)} ]$$

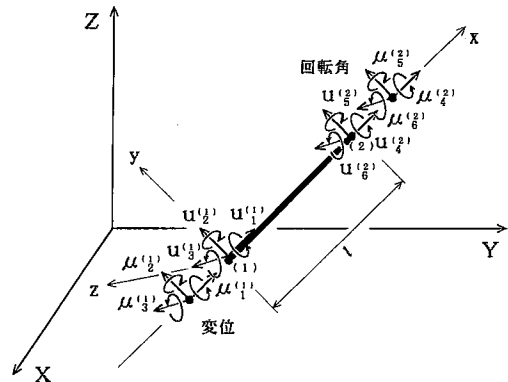


図1 立体骨組要素と変位及び回転角

$$\{\lambda\}^T = [\lambda_1^{(1)} \lambda_2^{(1)} \lambda_3^{(1)} \lambda_4^{(1)} \lambda_5^{(1)} \lambda_6^{(1)} \lambda_1^{(2)} \lambda_2^{(2)} \lambda_3^{(2)} \lambda_4^{(2)} \lambda_5^{(2)} \lambda_6^{(2)}]$$

$$\{\mu\}^T = [\mu_1^{(1)} \mu_2^{(1)} \mu_3^{(1)} \mu_4^{(1)} \mu_5^{(1)} \mu_6^{(1)} \mu_1^{(2)} \mu_2^{(2)} \mu_3^{(2)} \mu_4^{(2)} \mu_5^{(2)} \mu_6^{(2)}]$$

$u_i^{(1)}, u_i^{(2)}$ : 要素の材端(1), (2)の変位

$\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}$ : Lagrange の未定乗数

$\mu_i^{(1)}, \mu_i^{(2)}$ : Lagrange の未定乗数

$P_i, d_i$ : 節点力と節点変位 (一付は既知量)

$\Sigma$ : すべての要素の総和

$\Sigma_{on}, \Sigma_{un}$ : 前者は力学的境界節点についての総和, 後者は幾何学的境界節点についての総和を意味する。ただし, 簡単のために, 各節点では力学的境界条件, または, 幾何学的境界条件のどちらかが課せられるとする。

以下, 添字(1), (2)は要素に対する場合には付け, 節点に対する場合には, 付けないものとする。また, 同一項内に2度現れる添字  $i$  は,  $i$  を 1, 2, 3, 4, 5, 6 とおいて得られる項の総数をとる, いわゆる, 総和規約を用いている。

いま, ひずみエネルギーを材端変位により表せば次式となる。

$$\int_l A(u_i) dx = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} \quad (2)$$

ここに,

$[k]$ : 要素の弾性剛性マトリックス (付録1参照)

(2)式を(1)式に代入して汎関数  $\Pi_{PH}$  の第1変分をとれば次式ようになる。

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{PH} = & \Sigma \{ \delta u \}^T [k] \{ u \} - \{ \delta \lambda \}^T \{ u - \mu \} \\ & - \{ \lambda \}^T \{ \delta u - \delta \mu \} - \Sigma_{on} \bar{P}_i \delta d_i - \Sigma_{un} [ \delta P_i (d_i - \bar{d}_i) \\ & + P_i \delta d_i ] \end{aligned} \quad (3)$$

したがって, 変分をうける各々の独立変数に関する停留条件は, 上式から次のように表される。

1)  $\{u\}$  に関する停留条件

各要素において,

$$[k] \{u\} = \{\lambda\} \quad (4)$$

また, (4)式の左辺は, 材端力ベクトル  $\{f\}$  と等価であることは明らかなので,

$$\{f\} = \{\lambda\} \quad (5)$$

となり, Lagrange の未定乗数  $\{\lambda\}$  は, 停留解においては, 材端力  $\{f\}$  という物理的意味を持つ。したがって, (4)式は各部位における材端変位と材端力との関係式である。また,  $\{u\}, \{\lambda\}, \{f\}$  は, 各要素で独立に選べる変数なので, 要素座標系で定義される。

2)  $\{\lambda\}$  に関する停留条件

各要素において,

$$\{u\} = \{\mu\} \quad (6)$$

すなわち, もう一つの Lagrange の未定乗数  $\{\mu\}$  は, 停留解においては, 材端変位  $\{u\}$  に等しくなる。また,  $\{\mu\}$  は, 節点変位という物理的意味も併せ持っている。したがって,  $\{\mu\}$  は要素座標系で表された節点変位と言い換えることもできる。いま, 全体座標系で定義された節点変位を  $\{d\}$  とおけば, 座標変換マトリックス  $[T]$  を用いて,  $\{\mu\}$  と  $\{d\}$  との関係式は次のように表される。

$$\{\mu\} = [T] \{d\} \quad (7)$$

ここに,

$$[T] = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \quad (8)$$

また,

$$[L] = \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \quad (9)$$

となる。

マトリックス  $[L]$  は次の2つの場合について与え

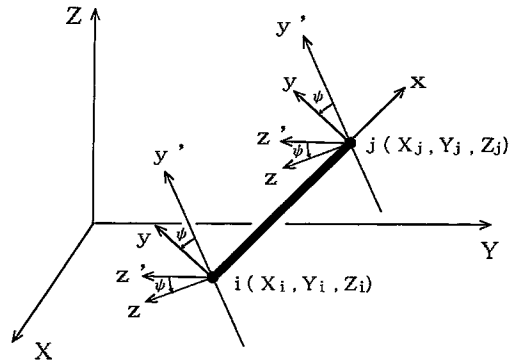


図2(a) 部材  $x$  軸が全体  $Z$  軸と平行でない場合

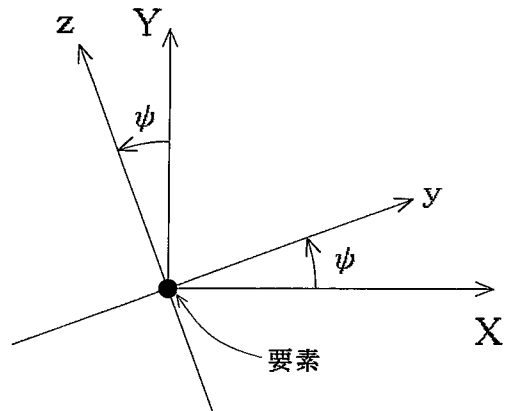


図2(b) 部材  $x$  軸が全体  $Z$  軸と平行な場合

られる。

- a) 部材  $x$  軸が全体  $Z$  軸と平行でない場合 (図 2 (a)参照)

$$[f] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ \frac{-m_x \cos \psi - n_x l_x \sin \psi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} & \frac{l_x \cos \psi - m_x n_x \sin \psi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} & \sqrt{l_x^2 + m_x^2} \sin \psi \\ \frac{m_x \sin \psi - n_x l_x \cos \psi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} & \frac{-l_x \sin \psi - m_x n_x \cos \psi}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} & \sqrt{l_x^2 + m_x^2} \cos \psi \end{bmatrix}$$

- b) 部材  $x$  軸が全体  $Z$  軸と平行な場合 (図 2 (b)参照)

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

(7)式に(6)式を代入すれば、(7)式は、各要素の材端変位と、その両端が接続している節点の変位との関係式となる。したがって、書き直せば、次のような節点における変位の適合条件式になる。

$$\{u_i\} = [L] \{d_i\} \quad (12)$$

ここに、

$$\{u_i\}^T = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6]$$

$$\{d_i\}^T = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6]$$

- 3)  $\{d_i\}$  に関する停留条件

各力学的境界節点において、

$$\sum_{\text{ewn}} [L]^T \{\lambda_i\} = \{\bar{P}_i\} \quad (13)$$

各幾何学的境界節点において、

$$\sum_{\text{ewn}} [L]^T \{\lambda_i\} = \{P_i\} \quad (14)$$

ここに、 $\sum_{\text{ewn}}$ 、 $\sum_{\text{ewn}}$  は、それぞれ、力学的境界条件が課せられている節点、幾何学的境界条件が課せられている節点における、その節点に接続されている要素のその節点側の材端力の総和を示している。(13)式、(14)式は各節点における外力とその節点に接続されている要素の材端力との関係式、すなわち、各節点での力のつりあい条件式である。(13)式は、節点変位を求めるために使用され、(14)式は、反力の計算に利用される。

- 4)  $\{P_i\}$  に関する停留条件

各幾何学的境界節点において、

$$\{d_i\} = \{\bar{d}_i\} \quad (15)$$

(15)式は、通常では、変位に関する付帯条件として取り扱われるものである。

(13)式に、(4)式、(6)式、(7)式、(15)式を代入すれば、各力学的境界条件が課せられている節点において、節点変位を未知数とする力のつりあい条件式が導かれる。この力のつりあい条件式は、最小ポテンシャルエネルギーの原理による式と同一になる。しかしながら、最小ポテンシャルエネルギーの原理と比較して

本原理の有効な点は以下のようなものである。

- a) 不静定骨組を解くために必要な3つの条件式<sup>5)</sup>

1. 各要素における材端変位と材端力との関係式
2. 各節点における変位の適合条件式
3. 各節点における力のつりあい条件式

が、停留条件から誘導される。

- b) また、これまでの結果を用いて、汎関数  $\Pi_{PH}$  ((1)式) を書き改めれば、

$$\begin{aligned} \Pi_{PH} = & \sum_e \left[ \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} - \{f\}^T \{u\} \right] \\ & - \sum_{\text{ewn}} \left[ \bar{P}_i d_i - \sum_{\text{ewn}} f_i \mu_i \right] - \sum_{\text{un}} \left[ P_i (d_i - \bar{d}_i) - \sum_{\text{ewn}} f_i \mu_i \right] \end{aligned} \quad (16)$$

となり、要素と節点とは別々に考えることができる。

したがって、ハイブリッド型ポテンシャルエネルギーの原理により骨組構造解析を行うには、まず、構造物を要素と節点とに分割し、そして、それぞれについてのエネルギーを、材端力、材端変位、節点変位を用いて表し、それらの総和として汎関数を求める。次に、汎関数の第1変分を作り、それぞれの変数に関する停留条件を求めれば、各節点における変位の適合条件式や、力のつりあい条件式が得られる。ハイブリッド法を接合部問題に適用する利点としては、柱はり接合部の変形に関するエネルギーを材端変位や節点変位だけでなく、材端力を用いて表現できることにある。種々の接合部問題に対して、それぞれの場合に対応した補正項を汎関数に付加するのみで簡単に基礎式が誘導される。

## 2.2 剛域を考慮した立体骨組モデル

開口のある耐震壁または壁式ラーメンをもつ構造物をラーメン理論で解く場合には、材端を剛域と見なし、それを考慮できる解析法が必要とされる<sup>6)</sup>。

剛域を考慮した骨組構造解析は平面骨組問題で取り扱われている。その1つの方法として、剛域を材端にもつ要素の材端力-節点変位関係式を直接的にモールの定理により誘導し、それを節点における力のつりあい条件式に代入して節点変位を求めるものがあり<sup>7)</sup>、他の方法としては、1部材を2つの材端剛域要素と1つの可撓要素に分割し、剛域要素の剛性を可撓要素のそれに比して非常に大きく選ぶことにより計算を行うものがある。一方、筆者等は、ハイブリッド法を適用した次のような方法を提案している<sup>8)</sup>。すなわち、図3に示すように、節点まわりの剛域を1つの剛体と考え、弾性変形要素は材端の剛域を削除した部分とする。

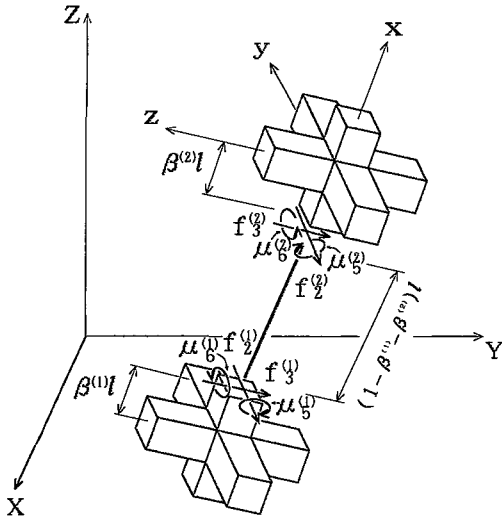


図3 要素と剛域

したがって、要素の材端と節点とは同一の点ではないので、材端変位と節点変位とは必ずしも一致しない。また、剛体に作用する材端力の作用線は必ずしも節点を通るとは言えないので、その力の節点に関するモーメントによるポテンシャルを新たなエネルギーとして考慮して汎関数に付加する方法である。

本報告において、剛域を考慮した立体骨組モデルの汎関数は、剛域を考慮した平面骨組モデルのものを拡張して次のように求められる。すなわち、汎関数(1)式に、各要素において、次式で与えられる材端せん断力のポテンシャルを付加すればよい。

$$\begin{aligned}
 & -(-\beta^{(1)}l \cdot f_2^{(1)} \cdot \mu_6^{(1)} + \beta^{(2)}l \cdot f_2^{(2)} \cdot \mu_6^{(2)} + \beta^{(1)}l \cdot f_3^{(1)} \cdot \mu_5^{(1)} \\
 & -\beta^{(2)}l \cdot f_3^{(2)} \cdot \mu_5^{(2)}) \quad (17)
 \end{aligned}$$

ここに、

$l$ : 節点間材長

$\beta$ : 要素端剛域の節点間材長に対する割合

$\mu$ : 節点変位

$f$ : 材端せん断力

(17)式を、(1)式に付加すれば

$$\begin{aligned}
 \Pi_{PH} = & \sum_e [ \int_i A(u_i) dx - \{f\}^T \{u - \mu\} \\
 & - (-\beta^{(1)}l \cdot f_2^{(1)} \cdot \mu_6^{(1)} + \beta^{(2)}l \cdot f_2^{(2)} \cdot \mu_6^{(2)} \\
 & + \beta^{(1)}l \cdot f_3^{(1)} \cdot \mu_5^{(1)} - \beta^{(2)}l \cdot f_3^{(2)} \cdot \mu_5^{(2)}) ] \\
 & - \sum_{\overline{m}} \bar{P}_i d_i - \sum P_i (d_i - \bar{d}_i) \quad (18)
 \end{aligned}$$

となり、(18)式の第1変分をとると次式となる。

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_{PH} = & \sum_e \{ \delta u \}^T [k] \{ u \} - \{ \delta f \}^T \{ u - \mu \} \\
 & - \{ f \}^T \{ \delta u - \delta \mu \} - (-\beta^{(1)}l \cdot \delta f_2^{(1)} \cdot \mu_6^{(1)} \\
 & - \beta^{(1)}l \cdot f_2^{(1)} \cdot \delta \mu_6^{(1)} + \beta^{(2)}l \cdot \delta f_2^{(2)} \cdot \mu_6^{(2)} \\
 & + \beta^{(2)}l \cdot f_2^{(2)} \cdot \delta \mu_6^{(2)} + \beta^{(1)}l \cdot \delta f_3^{(1)} \cdot \mu_5^{(1)} \\
 & + \beta^{(1)}l \cdot f_3^{(1)} \cdot \delta \mu_5^{(1)} - \beta^{(2)}l \cdot \delta f_3^{(2)} \cdot \mu_5^{(2)} \\
 & - \beta^{(2)}l \cdot f_3^{(2)} \cdot \delta \mu_5^{(2)}) ] - \sum_{\overline{m}} \delta P_i d_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \beta^{(1)}l \cdot f_3^{(1)} \cdot \delta \mu_5^{(1)} - \beta^{(2)}l \cdot \delta f_3^{(2)} \cdot \mu_5^{(2)} \\
 & - \beta^{(2)}l \cdot f_3^{(2)} \cdot \delta \mu_5^{(2)}) ] - \sum_{\overline{m}} \bar{P}_i \delta d_i \\
 & - \sum_{\overline{m}} [ \delta P_i (d_i - \bar{d}_i) + P_i \delta d_i ] \quad (19)
 \end{aligned}$$

次に、付加項に含まれる変数に関する停留条件を求め、剛域を考慮した場合に付け加えられる、各節点における変位の適合条件式や力のつりあい条件式を求めらる。

1)  $f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, f_3^{(1)}, f_3^{(2)}$  に関する停留条件

各要素において、

$$\begin{aligned}
 & -(u_2^{(1)} - \mu_2^{(1)}) + \beta^{(1)}l \cdot \mu_6^{(1)} = 0 \\
 & -(u_2^{(2)} - \mu_2^{(2)}) - \beta^{(2)}l \cdot \mu_6^{(2)} = 0 \\
 & -(u_3^{(1)} - \mu_3^{(1)}) - \beta^{(1)}l \cdot \mu_5^{(1)} = 0 \\
 & -(u_3^{(2)} - \mu_3^{(2)}) + \beta^{(2)}l \cdot \mu_5^{(2)} = 0 \quad (20)
 \end{aligned}$$

すなわち、要素の材端の材軸と直角方向の変位は、節点のその方向の変位と節点の剛体回転に伴うその方向の変位の和に等しいことを示している。

2)  $\mu_5, \mu_6$  に関する停留条件

各要素の材端回転角とその材端が接続している節点の回転角との関係式は次式で与えられる。

$$\{u'\} = [L] \{d'\} \quad (21)$$

ここに、

$$\{u'\}^T = [u_4 \ u_5 \ u_6]$$

$$\{d'\}^T = [d_4 \ d_5 \ d_6]$$

各節点における力のつりあい条件式を求めるために、各要素の材端回転角でなく、各節点の回転角に関する停留条件を求めれば次のようになる。

各力学的境界節点において、

$$\sum_{\overline{m}} [L]^T \{f'\} = \{\bar{P}'\} \quad (22)$$

各幾何学的境界節点において、

$$\sum_{\overline{m}} [L]^T \{f'\} = \{P'\} \quad (23)$$

ここに、

$$\{f'\}^T = [f_4 \ f_5 \mp \beta l \cdot f_3 \ f_6 \pm \beta l \cdot f_2]$$

$$\{\bar{P}'\}^T = [\bar{P}_4 \ \bar{P}_5 \ \bar{P}_6], \quad \{P'\}^T = [P_4 \ P_5 \ P_6]$$

また、式中の干及び士は要素の材端の(1)、(2)のどちらがその節点に接続されているかで決定されるものである。材端(1)の場合には上の符号となり、(2)の場合には下の符号となる。ただし、柱材、はり材ともに、全体座標系における座標値の小さい方から順に(1)、(2)とする。

(22)式、(23)式は、1つの剛体と見なされる各節点に作用する外力モーメントは、その剛体に接続される各要素のその節点側の材端モーメントと材端せん断力によるモーメントとの和の総和に等しいという各節点におけるモーメントのつりあい条件式を示している。

したがって、構造全体の剛性マトリックスを求める

際に簡便に取り扱えるように、要素の材端力ベクトル中の材端モーメントに対応する項を、材端モーメントと材端せん断力によるモーメントとの和で置き換えれば、剛域考慮の立体骨組構造解析用の各要素の材端力一節点変位関係式は、(20)式から(23)式より、付録2で与えられる。ここに、 $k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1212}$  は、付録1の弾性剛性マトリックスの各要素である。

付録1の剛性マトリックスの代わりに、付録2のそれを用いれば、全く同様の手順で、剛域考慮の立体骨組構造解析を行うことができる。

### 3. 数値解析例

解析モデルは、図4、図5に示すような Y 軸方向水平力を、2つの節点において同一方向及びねじれの生じる方向に受ける、1層1スパンの立体ラーメンである。各要素の剛域部分の長さは材長の10%または20%ずつを各要素の両端からとるものとする。ただし、基礎部分は剛節点であると考えられるので、柱脚部の剛域は考慮しないとする。各部材の断面諸量を次に示す。

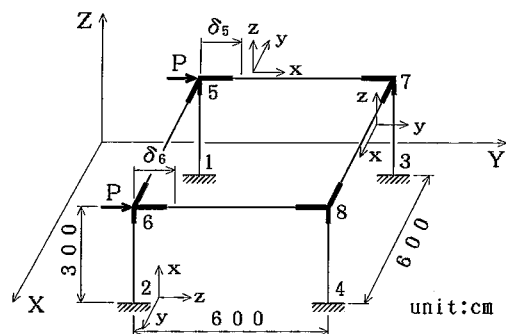


図4 Y 軸方向水平力を同一方向に受ける場合

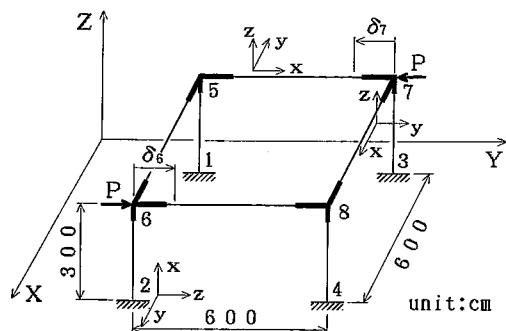


図5 Y 軸方向水平力をねじれの生じる方向に受ける場合

表1 Y 軸方向水平力を同一方向に受ける場合の剛域の割合と変位の関係

剛域 (%)	$\delta_5 (= \delta_6) (\times 10^{-2} \text{ cm})$
0	1.535
10	1.097
20	0.714

表2 Y 軸方向水平力をねじれの生じる方向に受ける場合の剛域の割合と変位の関係

剛域 (%)	$\delta_5 (= -\delta_7) (\times 10^{-2} \text{ cm})$
0	1.515
10	1.079
20	0.698

- X, Y 軸方向部材  
H-600×200×11×17,  $A=134.4(\text{cm}^2)$ ,  $E=2100(\text{t/cm}^2)$   
 $I_y=77600(\text{cm}^4)$ ,  $I_z=2280(\text{cm}^4)$ ,  $GJ=73401(\text{t}\cdot\text{cm}^2)$
- Z 軸方向部材  
□-400×400×16,  $A=239.2(\text{cm}^2)$ ,  $E=2100(\text{t/cm}^2)$   
 $I_y=I_z=57900(\text{cm}^4)$ ,  $GJ=73383543(\text{t}\cdot\text{cm}^2)$
- 荷重  $P=1 \text{ t}$

解析で得られたそれぞれの場合についての、要素端剛域の節点間材長に対する割合と荷重点の Y 軸方向変位との関係を表1、表2に示す。

以上の結果から、剛域部分の長さを長くしていくにつれ、荷重点の変位は徐々に小さくなっていくことが確かめられた。

### 4. ま と め

本報告では、ハイブリッド型ポテンシャルエネルギーの原理に基づく立体骨組構造解析に関する基礎式の誘導を行うとともに、その方法を応用して剛域を考慮した立体骨組構造解析が可能であることを示した。そして、以下の結論が得られた。

- 1) 立体骨組構造解析に必要なとなる3条件、すなわち、各節点における力のつりあい条件、各節点における変位の適合条件、そして、各要素における材端力と材端変位との関係式が、停留条件から誘導される。
- 2) 剛域を考慮した解析を行う場合には、節点まわりの剛域を1つの剛体と見なし、節点の剛体回転

に伴う材端せん断力のポテンシャルを汎関数に付加するのみで、停留条件から必要な条件式が求められる。

- 3) 数値解析結果より、剛域部分の長さを大きくするに従って、荷重点の変位は小さくなることが分かった。

今後は、この方法を種々の接合部問題、すなわち、柱はり接合部のせん断変形を考慮する場合、半剛接合部問題、そして、材端に塑性ヒンジが生成される場合に適用できるように研究をすすめる予定である。

## 文 献

- 1) 日置，中本：接合部パネルのせん断変形を考慮したたわみ角法，日本建築学会論文集，第101号，pp. 39-44, (1964)
- 2) 小堀為雄，吉田 博：有限要素法による構造解析プログラム，pp. 53-73, 丸善株式会社，(1980)
- 3) 鷺津：弾性学の変分原理概論，コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-3-A，pp. 26-31, 培風館，(1972)
- 4) 高松隆夫，椋代仁朗：ハイブリッド型ポテンシャルエネルギーの原理による平面骨組構造解析（その1），（その2），日本建築学会中国支部研究報告集，第11巻1号，pp. 33-40 (1983)
- 5) 日置：構造力学Ⅰ，朝倉建築工学講座Ⅰ，pp. 93-104, 朝倉書店，(1970)
- 6) 武藤：構造設計法，建築学体系14，pp. 214-222, 彰国社，(1968)
- 7) 成岡，服部，加藤，上田：骨組構造解析，コンピュータによる構造解析工学講座Ⅱ-1-B，pp. 86-87, 培風館，(1971)
- 8) 高松隆夫，松尾 彰，椋代仁朗，ラフィーク，W. サリブ：弱パネル型H型鋼柱・はり接合部を有する平面骨組の構造解析，構造工学論文集，Vol. 37B, pp. 295-302 (1991)

(付録 1)

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ & & & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ & & & & & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ & & & & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ & & & & & & & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

S.Y.M.

(付録 2)

$$\begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ f_3^{(1)} \\ f_4^{(1)} \\ f_5^{(1)} - \beta^{(1)} f_3^{(1)} \\ f_6^{(1)} + \beta^{(1)} f_2^{(1)} \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \\ f_4^{(2)} \\ f_5^{(2)} + \beta^{(2)} f_3^{(2)} \\ f_6^{(2)} - \beta^{(2)} f_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} - \beta^{(1)} k_{13} & k_{16} + \beta^{(1)} k_{12} & k_{17} & k_{18} & k_{19} & k_{110} & k_{111} + \beta^{(1)} k_{19} & k_{112} - \beta^{(1)} k_{18} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} - \beta^{(1)} k_{23} & k_{26} + \beta^{(1)} k_{22} & k_{27} & k_{28} & k_{29} & k_{210} & k_{211} + \beta^{(1)} k_{29} & k_{212} - \beta^{(1)} k_{28} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} - \beta^{(1)} k_{33} & k_{36} + \beta^{(1)} k_{32} & k_{37} & k_{38} & k_{39} & k_{310} & k_{311} + \beta^{(1)} k_{39} & k_{312} - \beta^{(1)} k_{38} \\ & & & k_{44} & k_{45} - \beta^{(1)} k_{43} & k_{46} + \beta^{(1)} k_{42} & k_{47} & k_{48} & k_{49} & k_{410} & k_{411} + \beta^{(1)} k_{49} & k_{412} - \beta^{(1)} k_{48} \\ & & & & k_{55} - \beta^{(1)} k_{53} & k_{56} + \beta^{(1)} k_{52} & k_{57} - \beta^{(1)} k_{57} & k_{58} - \beta^{(1)} k_{57} & k_{59} - \beta^{(1)} k_{59} & k_{510} - \beta^{(1)} k_{510} & k_{511} + \beta^{(1)} k_{59} & k_{512} - \beta^{(1)} k_{58} \\ & & & & -\beta^{(1)} (k_{35} - \beta^{(1)} k_{33}) & -\beta^{(1)} (k_{36} + \beta^{(1)} k_{32}) & & & & & -\beta^{(1)} (k_{311} + \beta^{(1)} k_{39}) & -\beta^{(1)} (k_{312} - \beta^{(1)} k_{38}) \\ & & & & k_{65} + \beta^{(1)} k_{62} & + \beta^{(1)} (k_{25} + \beta^{(1)} k_{22}) & k_{67} + \beta^{(1)} k_{27} & k_{68} + \beta^{(1)} k_{28} & k_{69} + \beta^{(1)} k_{29} & k_{610} + \beta^{(1)} k_{210} & k_{611} + \beta^{(1)} k_{29} & + \beta^{(1)} (k_{211} + \beta^{(1)} k_{29}) \\ & & & & & & & & & & + \beta^{(1)} (k_{211} + \beta^{(1)} k_{29}) & + \beta^{(1)} (k_{212} - \beta^{(1)} k_{28}) \\ & & & & & & k_{77} & k_{78} & k_{79} & k_{710} & k_{711} + \beta^{(1)} k_{79} & k_{712} - \beta^{(1)} k_{78} \\ & & & & & & & k_{88} & k_{89} & k_{810} & k_{811} + \beta^{(1)} k_{89} & k_{812} - \beta^{(1)} k_{88} \\ & & & & & & & & k_{99} & k_{910} & k_{911} + \beta^{(1)} k_{99} & k_{912} - \beta^{(1)} k_{98} \\ & & & & & & & & & k_{1010} & k_{1011} + \beta^{(1)} k_{109} & k_{1012} - \beta^{(1)} k_{108} \\ & & & & & & & & & & k_{1111} + \beta^{(1)} k_{119} & + \beta^{(1)} (k_{911} + \beta^{(1)} k_{99}) \\ & & & & & & & & & & k_{1112} - \beta^{(1)} k_{118} & + \beta^{(1)} (k_{912} - \beta^{(1)} k_{98}) \\ & & & & & & & & & & & k_{1212} - \beta^{(2)} k_{128} \\ & & & & & & & & & & & -\beta^{(2)} (k_{912} - \beta^{(2)} k_{98}) \end{bmatrix}$$

S.Y.M.