

周期的に配列されたバッフルをもつ 二次元流路内流れのカオス現象

中西 助次*・品川 至英**・奥本 浩**

(平成 9 年 9 月 27 日受理)

Chaotic phenomena of flow in two-dimensional channel with periodically baffled elements

Suketsugu NAKANISHI, Yoshihide SHINAGAWA
and Hiroshi OKUMOTO

(Received Sept, 27, 1997)

Abstract:

The objective of this work is a numerical analysis of chaotic mixing in the two-dimensional channel flows. For the analytical flow models, the pulsatile flow through a rough-wall channel and the autonomous oscillating flow through a baffled channel were considered.

As the considered flow models are two-dimensional, we have a stream function $\phi(x, y, t)$, and the equations of motion of an advected particle are simply $\dot{x} = \partial\phi/\partial y$, $\dot{y} = -\partial\phi/\partial x$. These equations have the form of Hamilton's canonical equations for a dynamical system with one or two degree of freedom. Chaotic phenomena for the flow models were investigated by using Poincaré map and Liapunov exponents which are typical method for analysing dynamical systems. In addition, the relation of flows between the Eulerian and the Lagrangian representations was discussed.

The obtained results showed that the chaotic motion of an advected particle was demonstrated even when simply flow structure of a time-periodically fluctuated flow, from view of Eulerian representation, then chaotic mixing (stretching and folding of fluid element) can be produced consequently.

Key Words: Pulsatile flow, Autonomous oscillating flow, Chaotic phenomena, Chaotic mixing, Dynamical system, Hamiltonian system, Poincaré map, Liapunov exponents, Eulerian representation, Lagrangian representation

1. はじめに

近年、層流流域の流れで、オイラー系では規則的な時間的変動を示す二次元の流れ場が、ラグランジュ系

で観測すると不規則な挙動が現れる現象(カオスの現象)が報告されている^{1)~8)}。二次元非圧縮性流体の流れ場を移流する流体粒子の運動は、ハミルトン系の力学系問題として取り扱うことができることを

* 広島工業大学工学部機械工学科

** 広島工業大学大学院工学研究科機械システム工学専攻

Aref¹⁾によって示されて以来、力学系の解析手法を用いた流れ場の解析が注目されている。これまでに力学系理論を道具とした流れのカオス現象の研究は、円形タンク内の流れ¹⁾²⁾、キャビティ内の流れ³⁾⁴⁾、および回転円筒と回転軸の間を埋める流体の流れ^{5)~7)}など、比較的解析の容易な閉空間内の流れ場モデルを対象としたものが多い。

一方、これに関し、Howes と Roberts⁸⁾が研究したバッフルを周期的に配置した流路内流れは工学上よくみられる重要な流れ場であるにもかかわらず、この種の流れ場に対する研究例は少ない。流れのカオス現象は混合および拡散効果の促進として、工学的応用面で重要視されており、この種の流れ場について、力学系の解析手法を用いたカオス混合過程を調べることは工学的観点からも意義がある。

一般に、工学上の拡散混合は乱流であるが、近年の各種装置の小型化により層流領域の流れが注目されていること、膜型人工肺^{9)~11)}や透析器など医用装置はむしろ層流領域が一般的である(例えば乱流による強いせん断応力による血流の有形成分損傷を防ぐ)ことなどにより、層流領域流れの混合に関して基本的なデータの蓄積が要請されている。

著者らは層流混合過程とその応用に関する一連の研究^{12)~20)}で、周期的に配列された粗さ要素をもつ2次元粗面流路内の脈動流と周期的に配列された障壁板を

もつ2次元流路内の自励振動流とを数値的に調べ、オイラー的な視点による流れ構造について報告してきた。

本論文では、上述の2つの流路内流れについてパッシブなマーカー粒子のラグランジュ挙動を調べ、力学系の解析手法であるポアンカレ写像、リアプノフ指数を用いて上述の流れ場の流れのカオス性を検証し、さらにオイラー系とラグランジュ系との関連を調べ、これよりカオス的な混合過程について考察したので報告する。

2. 基礎方程式と解析手法

2.1 基本方程式と計算手法

解析の対象とする流れは非圧縮性粘性流体の流れであるので、支配方程式はナビエ・ストークスの方程式と連続の式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} = -\text{grad } p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

である。本論文で取り扱う流れ場は、2次元流路が仮定できるレイノルズ数の範囲に限定していること、および内部流問題であるので、解析には(1)、(2)に流れ関数 $\phi (u = \partial \phi / \partial y, v = -\partial \phi / \partial x)$ と渦度 $\omega (= \partial v / \partial x - \partial u / \partial y)$ を導入して得られる渦度輸送方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (3)$$

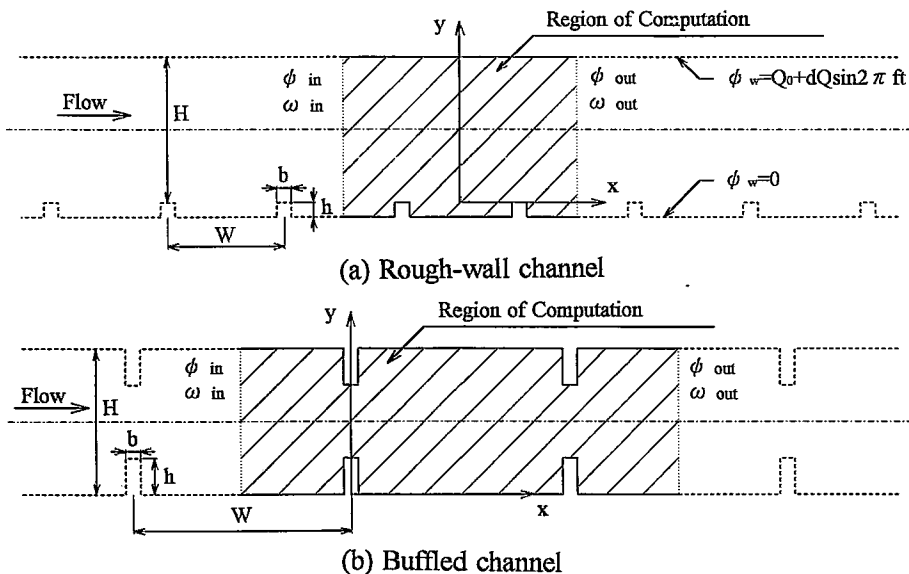


Fig. 1 Computational model.

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (4)$$

ここで、 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$

を用いる。流れ関数 ψ の導入は、(i)連続の式(2)を自動的に満足する、すなわち質量保存の法則を自動的に満たし、内部流の解析には適切であると考えられる、(ii) ψ をハミルトニアンとして解析することができるなどの利点がある、を考へてのことである。方程式(1)~(4)は代表速度を流路断面平均流速の時間平均値 U 、代表長さを流路幅 H 、および代表時間を H/U でそれぞれ無次元化している(図1(a),(b)参照)。また、レイノルズ数を $Re = UH/\nu$ (ν は動粘性係数)で定義し、圧力は ρU^2 で無次元化した。ここで、 x は流れ方向の、 y は横断面方向の無次元距離を表す。

方程式(3)、(4)を差分法を用いて数值的に解き、流れ場を解析する。計算手法は既報^{(12)~(20)}と同様であり、解の収束判定は $|\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)}| \leq 10^{-6}$ (n は反復回数)、 $|\omega(t+\Delta t) - \omega(t)| \leq 10^{-6}$ で行った。計算に用いた差分格子は粒子のラグランジュ的解析を行うことを考慮して等間隔の正方形格子とし、格子間隔は粗面流の場合は $\Delta h = 1/200$ 、障壁板付き流路の場合は $\Delta h = 1/100$ とした。

粒子の挙動は上述の差分法で得た速度場の時系列データを用いて行う。使用した粒子は質量と大きさをもたないパッシブなマーカー粒子とした。時系列データの時間刻み幅は粗面流路流れの場合は $\Delta t = 1/100$ 、障壁板付き流路内流れの場合は $\Delta t = 1/50$ とした。粒子挙動の計算は、空間的には線形補間、時間的には2次のルンゲ・クッタ法を用いた。粒子のラグランジュ的挙動で流れ場を調べる場合、その計算精度が重要になるが、これについては後述の2.4節で考察する。

2.2 解析モデル

解析モデルはオイラー系における基礎的知見が十分に得られている筆者らの一連の研究^{(12)~(20)}で用いた2種類のバッフル付き流路を選んだ。したがって本論文ではその概要のみを述べておく。流路モデルは図1に示すような十分長い二次元流路に、バッフルとして矩形状の粗さ要素を周期的に配列した場合(図1(a))の粗面流路と障壁板を周期的に配列した場合(図1(b))の障壁板付き流路の2種類である。これらのそれぞれの流路モデルについて、流れが十分発達してバッフルに対応した空間的周期性をもった領域を解析の対象とし、実際の計算はバッフル2周期分の領域について実行する。したがって、境界条件は(i)上流、下流で流れはペリオディックな流れ条件、(ii)壁面で流れはすべり

なしとなる。

粗面流路内流れは脈動流について解析する。脈動流は既報^{(15)~(19)}と同様、流路断面での流量 Q の時間変化

$$Q = Q_0 + dQ \sin(2\pi ft) \quad (5)$$

で与える。したがってこれを流れ関数 ψ で表すと、

$$\psi = \psi_0 + d\psi \sin(2\pi ft) \quad (6)$$

となる。実際の計算は下壁の $\psi = 0$ に対し上壁の ψ を(6)式で与えることにより実行される。ここで、 $Q_0 = \psi_0$ は定常流での流量 ($Q_0 = \psi_0 = 1$)、 f は代表時間 H/U で計った無次元周波数である。

障壁板付き流路内流れの場合、ある臨界レイノルズ数 Rec を越えると流れはHopf分岐して自励的に振動することが知られている⁽⁸⁾⁽¹¹⁾⁽²⁰⁾⁽²¹⁾。したがって上述のように陽に振動成分を付加しない(工学的には、脈動流発生時の付加的装置なしで自励的に発生する振動流現象を利用して拡散混合の促進を図ることの有益性が注目されている)。ただし計算過程においてはRoberts⁽²¹⁾と同様に、振動の発生トリガーとして加速流を用いた。すなわち、時間 $t \leq 0.25$ では上壁、下壁の流れ関数をそれぞれ $\psi = 0.5 \sin(2\pi ft)$ 、 $\psi = -0.5 \sin(2\pi ft)$ とした。これは流れのHopf分岐現象のトリガーとして加速流により慣性項 ($\mathbf{u} \cdot \text{grad}$) \mathbf{u} の非線形性の影響を陽に与える手法を用いたことになる。

2.3 ポアンカレ写像とリアプノフ指数

本論文では、流れがカオス的であるかどうかの判定をArefと同様にポアンカレ写像で考察する。それに加えて写像拡大率の対数であるリアプノフ指数が正であるという条件を用いて行う。その概要について述べておく。本論文で対象としている流れは非圧縮性流体の二次元流であるので、その速度場は流れ関数 $\psi(x, y)$ を用いて

$$\dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

で与えられる。これは ψ をハミルトニアンとする自由度1または2のハミルトン系であり、 xy 面は相空間となる¹⁾。 ψ が時間に依存しない場合 ($\psi = \psi(x, y)$) には粒子の運動は完全に決定的であり、粒子は ψ が一定の線上を運動する。一方、 ψ が時間とともに変化する場合 ($\psi = \psi(x, y, t)$)、粒子の運動は非可積分となり予測不能な運動をもたらす可能性がある。

前述したように(2.1~2.2節)、本論文の流れ場は時間的、空間的いずれも周期性を有すると仮定してい

るので、i) 流路内の粒子は Howes ら⁸⁾ と同様の手法を用いて注目した1ピッチ内に写像される(空間的周期性による)。ii) 状態空間の構造は図2に示すように時刻 $t=Ti$ (T : 振動周期, $i=1, 2, 3, \dots$) の状態が $t=0$ の xy 断面に連結される(時間的周期性による)。この xy 断面を周期的に通過する粒子点の集合としてポアンカレ写像が作成される。また任意の時間断面についても、同様に $t=t+Ti$ の状態を $t=t$ の xy 断面に連結することでポアンカレ写像が作成

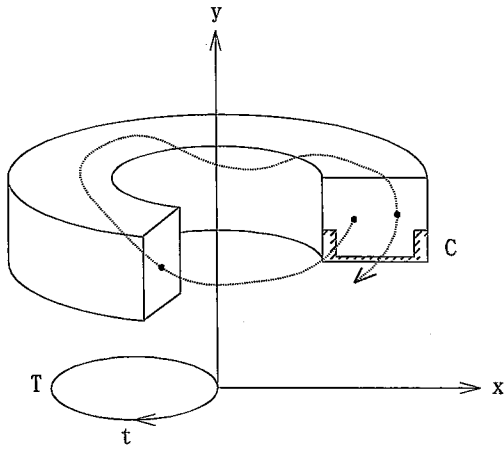


Fig. 2 Schematic view of Poincaré map.

される。

ここで、障壁板付き流路内流れの場合、厳密には流れの完全な時間周期性は満足していない。ただし、2つの異なる時刻 $t=t+Ti$ と $t=t+T(i+1)$ における y 方向流速成分 v を比較した結果、その差 Δv は $\Delta v/U \leq 10^{-4}$ であるので時間周期的な流れとして仮定した。

リアプノフ指数 $\langle \lambda \rangle$ は、時刻 $t=0$ で近接した2つの粒子 N 組に注目し、それら2つの粒子間距離の時間発展に対する指数的な拡大を示す量として定義される²²⁾²³⁾。本論文では y 方向の粒子間距離に着目して、

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{t} \ln \frac{\langle \Delta y(t) \rangle}{\langle \Delta y(0) \rangle} \quad (8)$$

で定義する。ここで、

$$\langle \Delta y(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta y_i(t) \quad (9)$$

ただし、 $\Delta y_i(t) = |y_{1i}(t) - y_{2i}(t)|$ である。実際には、 $\langle \lambda \rangle$ は横軸に t 、縦軸に $\ln \langle \Delta y(t) \rangle$ の片対数グラフ上の直線部分の傾きとして $\langle \lambda \rangle$ を表し、これを指数回帰式

$$\langle \lambda \rangle = \frac{n \sum (t \cdot \ln \langle \Delta y(t) \rangle) - \sum t \sum \ln \langle \Delta y(t) \rangle}{n \sum t^2 - (\sum t)^2} \quad (10)$$

により求めた (n : データ個数)。

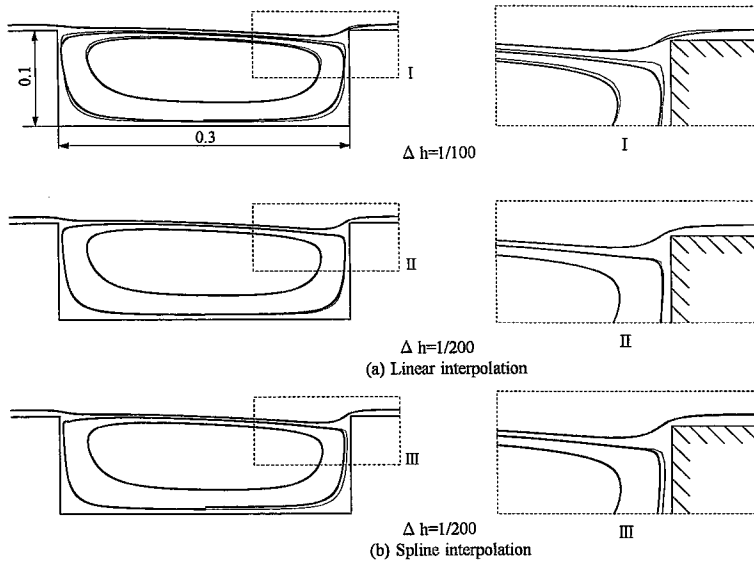


Fig. 3 Accuracy verification of particle tracking. ($W/h=4.0, Re=1000$)

2.4 精度検証

マーカ粒子の移動計算は、流れが層流であるので、空間については線形補間を、時間については2次のルンゲ・クッタ法を用いたアルゴリズム²⁴⁾で計算した。これら近似による誤差は現実的にさけることができない。ところが、ラグランジュ系による流れの解析では、この誤差の大小が解析精度の善し悪しを決める重要なカギともなっている。そこで本論文では、粗面流路内の定常流の解および滑面流路の振動流の解析解を用いて、手法の精度をあらかじめ検証した。

図3は粗面流路についての精度検証結果の一例を示したものである。図中の太線は流跡線（ラグランジュ系での粒子移動軌跡）、細線は流線（オイラー系での等流れ関数線）を示す。ここで、図3には流速が小さく補間誤差の影響が大きい溝内についてのみ示しており、溝外の主流領域では流跡線と流線は一致した結果を得ているので図示していない。図から、流線と流跡線のずれは溝下流側壁近傍の流速の小さな領域でしかも y 方向速度成分 v が存在する領域で大きい。空間メッシュ間隔 $\Delta h=1/100$ と $\Delta h=1/200$ を比較すると、 $\Delta h=1/200$ ではその差は無視できる程度となる（図3(a)参照）。したがって、この誤差は空間の線形補間による打ち切り誤差と考えられる。

図3(b)は $\Delta h=1/200$ についてのスプライン補間による結果を示したものである。図3(a)と(b)の比較より、壁面近傍の流速の小さい領域ではスプライン補間は線形補間よりも精度が劣ると考えられる。図示していないが、著者らの計算によると $\Delta h=1/100$ のスプライン補間では、補間誤差によりパッシブ・マーカ粒子が壁に衝突する場合が起こり、結果に本質的影響を与えることに注意する必要がある。

時間ステップ Δt と数値積分誤差については、滑面流路の振動流2次元ウォームズリーの解析解²⁵⁾²⁶⁾

$$u = u_c \sin 2\pi ft - u_s \cos 2\pi ft \quad (11)$$

ただし、

$$u_s = \frac{ReB}{8\beta^2} (1 - 2C_1 \sinh \beta y \sin \beta y + 2C_2 \cosh \beta y \cos \beta y) \quad (12)$$

$$u_c = \frac{ReB}{8\beta^2} (2C_1 \cosh \beta y \cos \beta y + 2C_2 \sinh \beta y \sin \beta y) \quad (13)$$

$$C_1 = \sinh \beta \sin \beta / (\cosh 2\beta + \cos 2\beta) \quad (14)$$

$$C_2 = -\cosh \beta \cos \beta / (\cosh 2\beta + \cos 2\beta) \quad (15)$$

$$\beta = (2\pi f Re / 8)^{1/2} \quad (16)$$

$$ReB = 4\beta^2 dQ / (C_{11}^2 + C_{22}^2)^{1/2} \quad (17)$$

$$C_{11} = \frac{\cosh \beta \sinh \beta - \sin \beta \cos \beta}{\beta (\cosh 2\beta + \cos 2\beta)} \quad (18)$$

$$C_{22} = 1 - \frac{\cosh \beta \sinh \beta + \sin \beta \cos \beta}{\beta (\cosh 2\beta + \cos 2\beta)} \quad (19)$$

を用いて検証した。検証はレイノルズ数 $Re=1000$ 、無次元振動周波数 $f=1.0$ 、振動流量 $dQ=0.1$ の流れにパッシブなマーカ粒子を100周期時間、2次のルンゲ・クッタ法で移動させた粒子の到達位置と解析解による到達位置との比較で行った。当然誤差は Δt に依存するが、流路内全領域の流れ場について、 $\Delta t \leq 1/50$ であれば十分である結果が得られた。

障壁板付き流路の場合についての精度検証では $\Delta h=1/100$ の正方形格子を用いた場合でも十分な精度が得られた。これは溝やそれともな溝内剥離渦のスケールが流路幅に対して大きく、また循環領域内の速度ベクトルの大きさが大きいことによると考えられる。

以上の結果より、本論文では粗面流路においては $\Delta h=1/200$ 、 $\Delta t=1/100$ 、障壁板付き流路については $\Delta h=1/100$ 、 $\Delta t=1/50$ のメッシュを採用した。

3. 結 果

粗面流路内の脈動流は、粗さ要素の配列ピッチ比 W/h 、レイノルズ数 Re 、脈動周波数 f および脈動流量 dQ のパラメータに依存しており、これらのパラメータ変化にともない主流および溝内の渦パターンは変化する¹⁵⁾¹⁶⁾。また、障壁板付き流路の流れは臨界レイノルズ数 $Rec(Rec \sim 100)$ ⁸⁾²⁰⁾²¹⁾ を越えると流れはHopf分岐して振動流成分を含むようになる。本論文ではこれらの流れ場のカオス現象を考察することを目的としており、パラメータは、粗面流路の場合 $W/h=4.0$ 、 $Re=1000$ 、 $f=1.0$ 、 $dQ=0.1$ 、障壁板付き流路の場合 $W/h=6.0$ 、 $Re=160$ に限定する。系統的なパラメータ変化に対する混合特性を評価することは重要であるが、これについては別の機会で報告する。

3.1 流線図

はじめに、流れ場の概要を理解しておくためにオイラー系でみた流れパターンを流線図で示す。

図4は粗面流の場合の流線図であり、脈動1周期の流れパターン変化を $t=0.125$ 間隔（1周期を8等分）で示している。また、図中の点線は $\phi=0$ を表す。参考として、定常流の場合についても合わせて示しておく。図から、溝内部の渦は脈動周期に対応した周期的な渦パターン変化をすることが分かる。溝内剥離渦

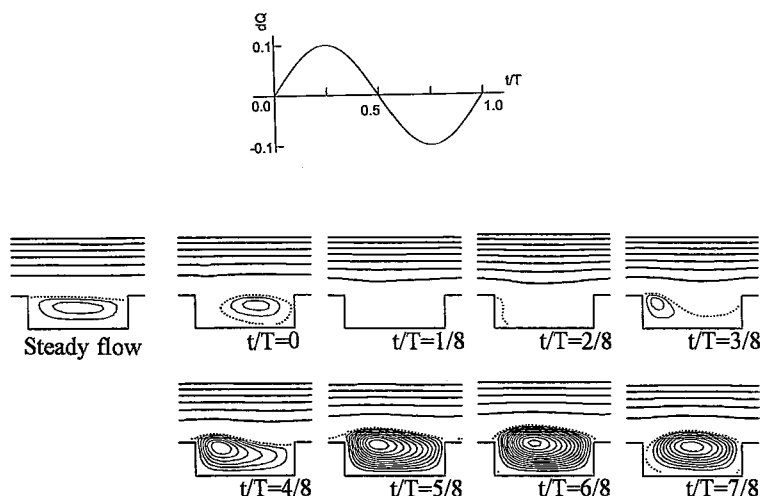


Fig. 4 Instantaneous streamlines for rough-wall channel.

($W/h=4.0, Re=1000, f=1.0, dQ=0.1$)

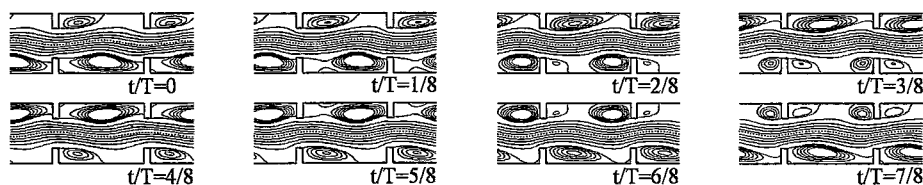


Fig. 5 Instantaneous streamlines for buffled channel.

($W/h=6.0, Re=160$)

は脈動1周期の間に発生、発達、減衰、消滅の過程を周期的に繰り返す。その時間変化過程は、 $t/T=2/8$ で溝内上流側に発生した剥離渦は流量の減少とともに発達し、下流に伸び、ついには溝内全体を覆う($t/T=3/8$)。つづいて溝内全領域を覆う剥離渦は脈動流量が最小となる $t/T=6/8$ において最大となる。その後剥離渦は上流壁から剥がれ、下流に流される過程で減衰し、 $t/T=1/8$ で消滅する。このような、溝内の流れの変動の激しいことが、溝内に混合の効果の促進を実現させるものと認識されている⁹⁾が、後述するようにオイラー的のみた流れパターンのみからは必ずしも結論づけることはできないと考えられる。

図5は障壁板付き流路の自律振動流の場合の流線を示している。図は自律振動1周期を8分割した時刻について示している。図中の点線は $\psi=0$ を示している。図から、下壁の障壁板下流側で形成された剥離渦が、時間の経過とともに発達し、そしてシェディング

して下流に流され、続いて上壁で下壁と同様にそれが起こり、流路上下で交互に起こる周期的流れパターンとなっている。また、流路中央付近の流線は剥離渦の挙動に対応する蛇行した流れパターンを示している。この流路内の流れは流路幅に対して剥離渦のスケールが大きく、また渦の強さの時間的な変化が大きいため、流路全体にわたる混合が期待される。

3.2 ポアンカレ写像

図6は粗面流の場合のポアンカレ写像を示したものである。図は脈動1周期を4等分した各時刻を示している。図より、各時刻断面で、粗面近傍 $y < 0.1$ の領域は点が大不規則に分布したカオスの海となっている。カオスの海の中には溝内と溝外に1つずつ、構造に規則性のみられる領域(以後島と呼ぶ)が存在している。カオスの海に配置された流体要素は引き伸ばし、折り畳みを受け、カオス的な混合が行われるのに対し、

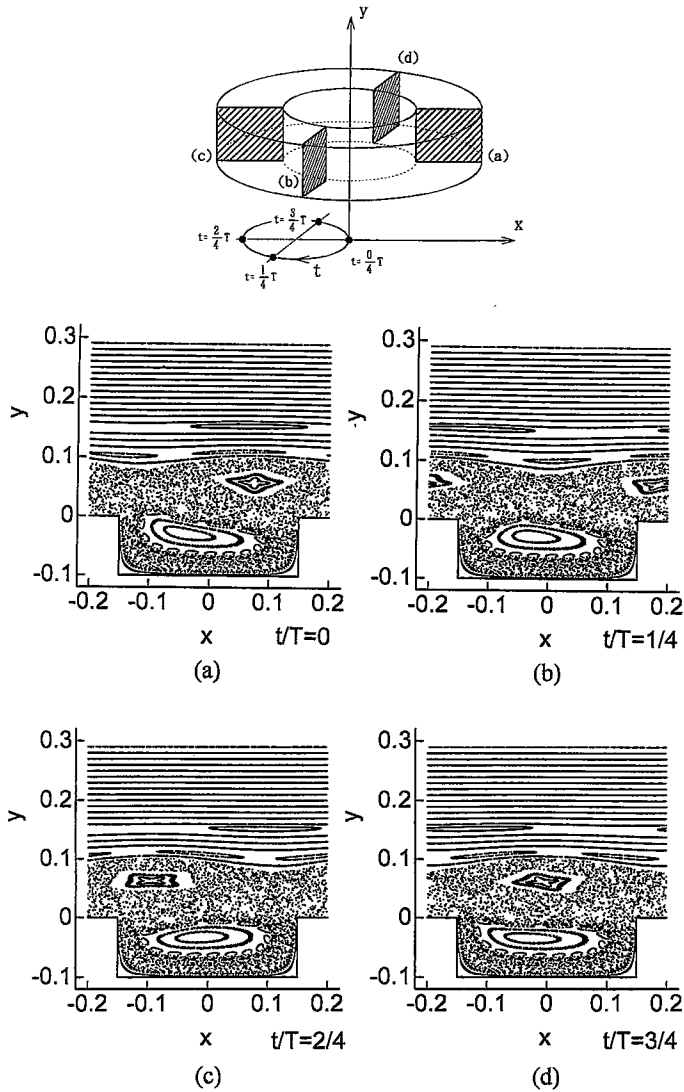


Fig. 6 Poincaré map for rough-wall channel.
($W/h=4.0$, $Re=1000$, $f=1.0$, $dQ=0.1$)

島の内部に配置された流体要素は島の中心まわりを回転するのみで、島外部の流体との出入りがないため混合には不適切な場所であることが知られている²⁷⁾。したがって、溝内の大部分の領域は島であるので混合には効果的でなく、図4で示した溝内の流れパターン変動の大きいことのみから、混合効率を直ちに予測できるとは必ずしもいえない。これについては、オイラー系でみた流れとラグランジュ系でみた流れの相互関係をさらに検討する必要がある。

溝内の島の外縁には14個の小さい島がみられる。この島は14周期楕円点周りに存在する粒子により形成されている。また14個の島は状態空間では繋がって14重巻き²⁸⁾のトーラス構造をもっている。また、ここにみられる「島のまわりの島」²⁹⁾の構造は自己相似的フラクタル構造であると推測している。

$y \sim 0.07$ に位置する島は脈動1周期中に粗さ要素を1つ越え、次の粗さの同じ位置に移動する。したがってこの島の中心は1周期楕円点となっている。

次に $y > 0.1$ の領域についてみると、 $y \sim 0.11$ の位置に2つの島がみられ、その中心は脈動2周期中に粗さ要素を3つ越えて同じ位置に移動する2周期楕円点となっている。 $y \sim 0.15$ の位置にみられる島は脈動1周期中に粗さ要素を2つ越えて同じ位置に移動する1周期楕円点となっている。

上述した溝内、溝外にみられる島について、Poincaré-Birkhoff の固定点理論²⁸⁾ から楕円点と楕円点との間には双曲点がそれらと同数存在し、これより双曲点はヘテロクリニック構造をもつことが予測できる。著者らはこれに関するいくつかの結果を得ているが、この領域におけるカオスの混合も含めて別の機会に報告する。

図7に障壁板付き流路内流れのポアンカレ写像を2ピッチ分について示す。図7(a)~(d)は自律振動1周期を4分割した各時刻断面について示したものである。

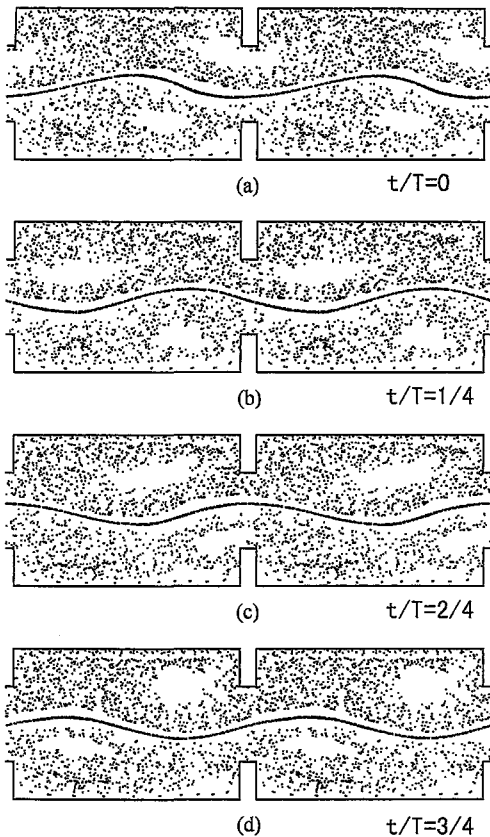


Fig. 7 Poincaré map for baffled channel. ($W/h=6.0, Re=160$)

この流路の場合も粗面流路の場合と同様、カオスの海と島が存在するが、粗面流と比較してカオスの海の面積は広く、混合の起こりやすい流れであるといえる。

流路の中心付近には構造的な領域(バリア)があり、それをはさんで両側に1ピッチあたり1つずつの島が存在する。この島は振動1周期中に障壁板を1枚越え、次のセルの同じ位置に移動する。図5で示した流線図と比較すると、島の挙動は剥離渦の挙動と対応していないが、バリアは流線図の $\phi=0$ の線と対応して蛇行していることが分かる。

流体粒子はバリアを越えて対向壁側に移動せず、バリアの存在は流路全体にわたる混合を妨げると考えられる。このバリアの存在はレイノルズ数に依存しており、T. Howes ら⁸⁾ により Re 数が増加した $Re \geq 180$ でバリアは破壊することが報告されている。図示していないが著者らも同様に $Re \geq 240$ で破壊する結果を得ている。このことから、この流路における流体混合の主パラメータは Re 数であることが推測される。

3.3 リアプノフ指数

カオス的な引き伸ばしの程度を定量的に評価するために、2.3節で導入したリアプノフ指数を用いて解析を行う。

図8は粗面流路の場合について、カオスの海に含まれる粒子2500組の2点間距離をそれぞれ(9)式を用いて平均し、 $\langle \Delta y(t) \rangle$ の時間発展を片対数表示したものである。初期条件は、 $\Delta y_i(0) = 1 \times 10^{-6}$ ($i=1, 2, \dots, 2500$) である。図中には、同じ個数(2500組)で

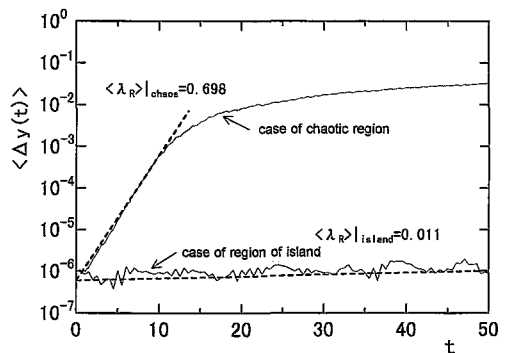


Fig. 8 Average distance between two particles $\langle \Delta y(t) \rangle$ with passage of time and Liapunov exponents $\langle \lambda \rangle$ for rough-wall channel.

($W/h=4.0, Re=1000, f=1.0, dQ=0.1$)

計算した、島についての結果も示している。図より、カオスの海の $\langle \Delta y(t) \rangle$ は $t < 10$ では指数直線的に増加し、 $t \sim 10$ で傾きが緩やかになり、 $t > 10$ では漸近的にカオスの海の大きさのスケールである 10^{-1} に近づく。この直線部分の傾きを指数回帰式(10)を用いて求めると $\langle \lambda_R \rangle|_{\text{chaos}} = 0.698$ である。したがってカオ

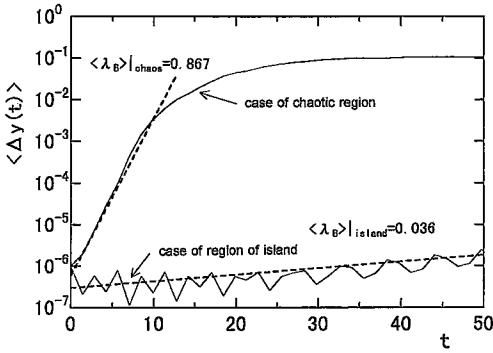


Fig. 9 Average distance between two particles $\langle \Delta y(t) \rangle$ with passage of time and Liapunov exponents $\langle \lambda \rangle$ for buffled channel. ($W/h=6.0$, $Re=160$)

スの海では混合割合の尺度である 2 点間距離の急激な拡大が行われていることが分かる。一方、島に配置された $\langle \Delta y(t) \rangle$ の時間発展に対する変化は小さい。この場合のリアプノフ指数は $\langle \lambda_R \rangle|_{\text{island}} = 0.011$ であり、2 点間の距離の変化はきわめて小さいといえる。

図 9 は障壁板付き流路の場合について示す。図より、カオスの海に含まれた粒子の $\langle \Delta y(t) \rangle$ は $t < 8$ では指数直線的に増加し、 $t \sim 8$ で傾きが緩やかになり $t > 8$ で 10^{-1} に漸近する。このときのリアプノフ指数は $\langle \lambda_B \rangle|_{\text{chaos}} = 0.867$ である。島に配置された粒子の $\langle \Delta y(t) \rangle$ は粗面流の場合と同様、時間的な変化は小さく、そのリアプノフ指数は $\langle \lambda_B \rangle|_{\text{island}} = 0.036$ と小さい。

3.4 粒子塊の変形

粗面流路と障壁板付き流路の流れ場についてポアンカレ画像で調べ、いずれの場合にもカオスの海と島の領域が存在することを述べた。これら両者の流域に、粒子群よりなる粒子塊を配置して、これら粒子の実空間におけるラグランジュ的挙動を調べることで流れの混合過程を考察する。図10(a)および図11(a)に実際に配置した粒子塊の位置を示す。粒子塊を構成する粒子数

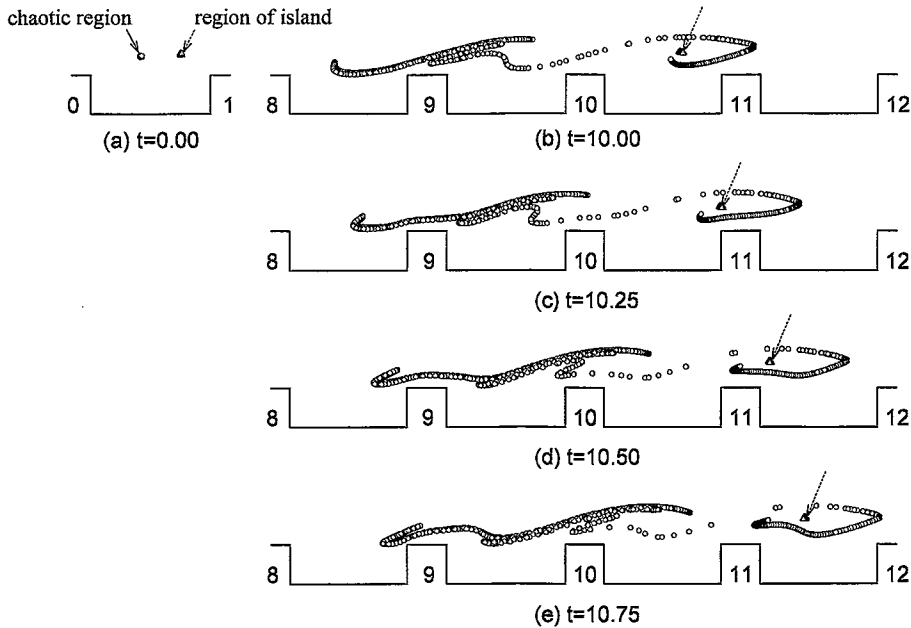


Fig. 10 Deformation of a blob for rough-wall channel. ($W/h=4.0$, $Re=1000$, $f=1.0$, $dQ=0.1$)

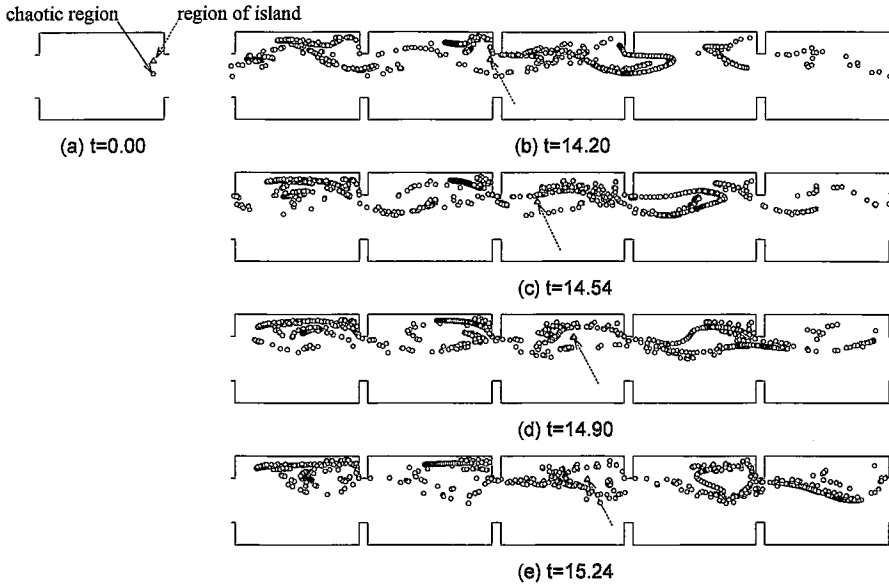


Fig. 11 Deformation of a blob for buffled channel.
($W/h=6.0, Re=160$)

は 40×40 個で、その粒子間隔 $\Delta=0.0001$ とした。

はじめに、図10に示した粗面流路の場合について考察する。 $t=0.00$ (図10(a)) でカオスの海に配置された粒子塊 (○印) は $t=10.00$ (図10(b)) において引き伸ばし、折り畳みを受けながら粗さ3ピッチにわたって分布しているのに対し、 $t=0.00$ で島に配置された粒子塊 (△印) は $t=10.00$ においても $t=0.00$ の状態からの変化はみられず、塊のまま流されている。

図10(b), (c), (d), (e)をみると $t=10.00$ で粗さ要素10と11の間にある○印の粒子は△印の粒子塊が含まれる島の周りを時計回りに回転しながら下流に流される。これに対し、 $t=10.00$ で粗さ要素9と10の間に位置する粒子に注目すると、流路中央側の粒子は引き伸ばしを受けながら島を取り巻くような粒子挙動を、一方粗面壁側の粒子は折り畳みを受けながら流されてゆくのが観察される。

図11は障壁板付き流路の場合について示したものである。図は図10と同様、 $t=0.00$ でカオスの海に配置された粒子を○印、島に配置された粒子を△印としている。図11(b)は自律振動10周期後の $t=14.20$ における粒子群のラグランジュ挙動の分布状態を示している。 $t=14.20$ において、○印の粒子は折り畳み、引き伸ばしを受けながら流路の上半分全体にわたって分布し

ているのに対し、△印 (左から2番目のセル内) の粒子塊は $t=0.00$ から変化せず流されていることがわかる。

図11(b), (c), (d), (e)に示すように、上述した粒子のラグランジュ挙動による分布状態の傾向は時間の経過とともに変わることはない。障壁板付き流路の場合の注目すべき結果は、本論文での Re 数範囲では流路全体にわたる混合は達成できないことである。

上述したように、カオス的な混合が起こるかどうかは初期位置 (そこがカオス領域であるかどうか) に決定的に依存する。

4. あとがき

二次元粗面流路内流れと二次元障壁板付き流路内自律振動流について、力学系解析の代表的手法であるポアンカレ写像、リアプノフ指数を用いて流れのカオス現象を検証し、さらにオイラー系、ラグランジュ系との関連を考察した。その結果、以下の知見を得た。

- (1) オイラー系でみた流れパターン変化は粗面流路流れおよび障壁板付き流路流れとも時間周期的な流れパターンを示し、これをポアンカレ写像でみると流体粒子の挙動が不規則になるカオス領域が存在する。
- (2) 粗面流路流れにおける溝内の流れはオイラー系で

- みると流れパターンの変化が激しく、一見溝内の混合を促進すると予測されるが、ポアンカレ写像でみると必ずしもそう結論づけることはできない。
- (3) 障壁板付き流路流れの場合、カオス領域の面積は粗面流路流れのそれと比較して広く、混合効率の高い流路であると考えられる。ただし、本論文で取り扱ったパラメータでは流路中央付近にバリアが存在し、流路全体にわたる混合は実現できない。
- (4) カオス領域に配置された粒子のリアプノフ指数 $\langle \lambda \rangle$ は、粗面流路については $\langle \lambda_R \rangle|_{\text{Chaos}} = 0.698$ 、障壁板の場合については $\langle \lambda_B \rangle|_{\text{Chaos}} = 0.867$ である。
- (5) 粗面流路、障壁板付き流路の流れ場における粒子群のラグランジュ挙動は、カオス領域に配置された粒子群は引き伸ばし、折り畳みを受け流れの広範囲にわたって分布するが、島に配置された粒子群は時間が経過しても島の外側に出ることはなく、それらは混合しない。したがってカオス的な混合が起こるかどうかは配置する粒子の初期位置に決定的に依存する。
- 力学系の解析手法は本研究で対象としている2次元流の流れ場に対して有効であり、とくにラグランジュ系でみた流れについて重要な知見を提供する。しかし、現実の流れで実験的にこれを計測し解釈することは不可能に近く、その意味でオイラー系による説明とラグランジュ的説明との相互関係について、今後の検討が必要である。

文 献

- 1) H. Aref, J. Fluid Mech., 143 (1984), 1-21.
- 2) D. V. Khakhar, et al, J. Fluid Mech., 172 (1986), 419-451.
- 3) W. -L. Chien, et al, J. Fluid Mech., 170 (1986), 355-377.
- 4) C. W. Leong and J. M. Ottino, J. Fluid Mech., 209 (1989), 463-499.
- 5) J. Chaiken, et al, Proc. R. Soc. Lond., A408 (1986), 165-174.
- 6) H. Aref and S. Balachandar, Phys. Fluids, 29 (1986), 3515-3521.
- 7) F. J. Muzzio, et al, Phys. Fluids, A4 (1992), 1439-1456.
- 8) T. Howes and E. P. L. Roberts, 12th Australasian Fluid Mech. Conf. (1995), 589-592.
- 9) I. J. Sobey, J. Fluid Mech., 96 (1980), 1-26.
- 10) C. N. Savvides and J. H. Gerrard, J. Fluid Mech., 138 (1984), 129-160.
- 11) T. Nishimura, et al, Int. J. Heat and Mass Transfer, 33-5 (1990), 835-845.
- 12) 中西・大坂, 機論, B55-516 (1989), 2181-2189.
- 13) 中西・大坂, 機論, B55-516 (1989), 2190-2197.
- 14) 中西・大坂, 機論, B52-484 (昭61), 3930-3934.
- 15) 中西・大坂, 機論, B52-484 (昭61), 3935-3939.
- 16) 中西・桜井・大坂, 日本機会学会第71期全国大会講演論文集, vol. C (1993), 194-196.
- 17) 中西・桜井・大坂, 日本機械学会第71期全国大会講演論文集, vol. C (1993), 197-199.
- 18) 中西・大坂, 第13回西日本乱流シンポジウム (1995)
- 19) 中西・品川・奥本, 第15回西日本乱流シンポジウム (1997)
- 20) 中西・峯尾・大坂, 日本機械学会中国四国支部第34期総会・講演会講演論文集 (1996), No. 965-1, 67-68.
- 21) E. P. L. Roberts, J. Fluid Mech., 260 (1994), 185-209.
- 22) 下條, カオス力学入門, 近代科学社 (1992), 86-95.
- 23) 長島・馬場, カオス入門 現象の解析と数理, 培風館 (1992), 105-110.
- 24) P. K. Yeung and S. B. Pope, J. Comp. Phys., 79 (1988), 373-416.
- 25) M. Kawaguti and A. Hamano, J. Phys. Soc. Jpn., 49 (1980), 817-824.
- 26) 中西・松尾, 広島工業大学研究紀要 第29巻 (1995), 67-73.
- 27) J. M. オットーノ, サイエンス (1989), 3月号, 50-63.
- 28) 森・蔵本, 岩波講座 現代の物理学 散逸構造とカオス, 岩波書店 (1994), 135-155, 248-272.
- 29) 合原編, カオス カオス理論の基礎と応用, サイエンス社 (1990), 109-131.