

ころがり—すべり接触下におけるき裂 先端部の応力解析

片 山 剛 之 丞*

(昭和61年9月29日受理)

Analysis of the tip of Initial Cracking in Rolling/Sliding Contacts

Gonojo KATAYAMA*

(Received Sept. 29, 1986)

In two elastic bodies that acts rolling/sliding contacts, it's well-known that follower side is apt to cause fracture than driver side. So trying to infinite the radius of curvature in follower side, this report consider the semi-infinite case and the initial cracking case. The former of this report compare the calculation results by finite element method with boundary element method. The latter of this report analyze the stress of initial cracking by boundary element method, and study propagation behavior of initial cracking.

Key Words: Rolling/Sliding Contacts, Surface Crack, Crack Propagation

1. ま え が き

ころがり—すべり接触をするふたつの弾性体において、その弾性体内部の応力解析を行なうのに、ほとんど荷重や接触形状は最初の状態での解析が多くなされ、それにもとづいて接触面の疲れき裂の発生、伝ば機構について論じられている。

しかしながら、き裂の伝ばや進展挙動は荷重を多数回繰り返し加えた後、き裂が発生し、そしてそのき裂が進展して行くと思われる。

そこで、き裂の進展挙動を応力状態から解明するためには、初期き裂が発生した時を取り上げて解析を行う方がより良いのではないかと思われる。

応力解析を行う方法として、一般的な方法として、有限要素法を用いることが多い。しかしながら、有限要素法を用いる場合には、有限要素に分割した領域内では応力が一定であると仮定する。このことにより、精度よく解析するためには、要素分割を非常にこまか

くとらなければならない。しかし要素分割をこまかくとすることは分割数がふえ、大容量の電子計算機が必要となる。また、これをさけるためにはズームング法^{1),2)}などの手法を用いて繰り返し計算しなければならない。これらの欠点を補い、より効果的な解析法として境界要素法が考えられる³⁾。境界要素法は境界だけを分割し、そこで境界上の積分方程式に変換し、この積分方程式を解くことにより解析する方法である⁴⁾。このことより、2次元領域の問題では、それをかこむ曲線の境界のみを考えればよく、また3次元領域の問題では、それをかこむ曲面の境界を考えればよいので、結局次元が一次元すくなくてすむ。また、境界要素において任意の内点での応力が計算出来るので、物体内部の応力解析には有限要素法よりも適しているのではないかと思われる。本研究では従動側の曲率半径を無限大とし、解析モデル1をき裂を持たない半無限弾性体として、有限要素法および境界要素法を用いて解析を行い、解析モデル2については初期き裂を持つ半無

* ○○○○

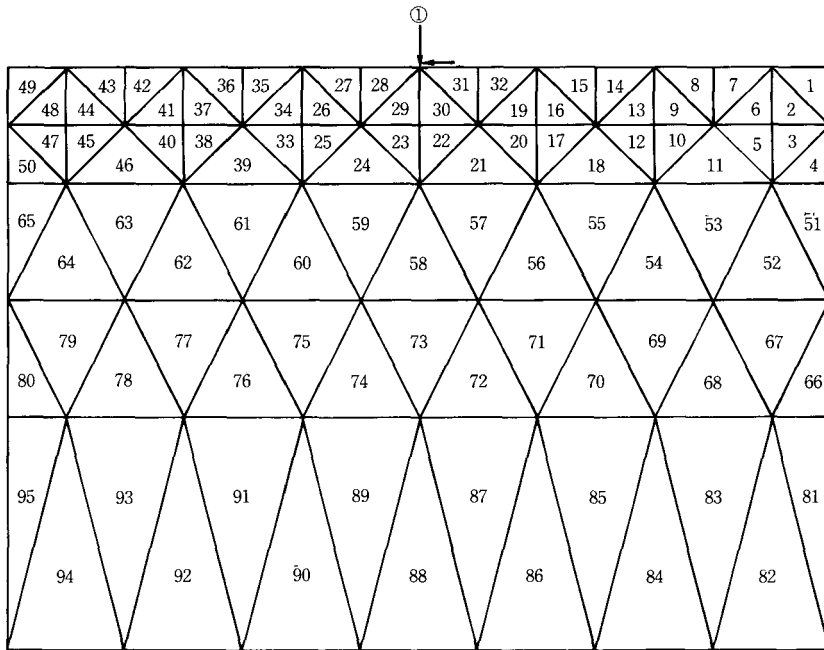


図1 解析モデル1 (要素分割と要素番号)

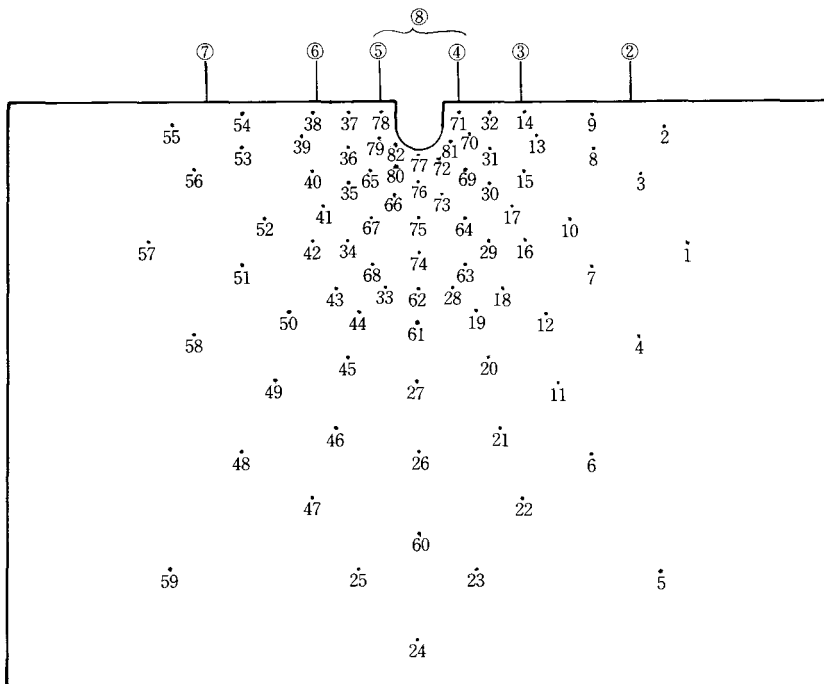


図2 解析モデル2 (解析内点)

限弾性体として、境界要素法を用いて、き裂先端部の進展挙動を応力状態より解析を行った。

2. 解析モデル

ころがりすべり接触をするふたつの弾性体において、駆動側よりも従動側の方に損傷が起り易いことはよく知られている。そこで、従動側の曲率半径を無限大と考えると、き裂をもたない半無限弾性体の場合と初期き裂をもつ半無限弾性体の場合の二つのモデルを考えた。き裂をもたない場合をモデル1とし、図1に有限要素法における要素分割と要素番号を示した。

次に、初期き裂をもつ場合をモデル2とし、初期き裂をU字形でシュミレートし、境界要素法における解析内点の位置を図2に示す。ここで、図1および図2における①～⑧は荷重位置を示す。

3. 有限要素法と境界要素法

3.1 有限要素法

図1の解析モデル1において、任意の要素について考える。この要素に関して、節点変位および応力を求める。

仮想仕事の原理より

$$\{\delta\}^T \cdot \{P\} dV + \{\delta\}^T \cdot \{F\} dV - \{\epsilon\}^T \cdot \{\sigma\} dV = 0 \quad (1)$$

が成立する。

- ここで、
 $\{\delta\}$; 仮想変位
 $\{P\}$; 単位体積当りの表面力
 $\{F\}$; 単位体積当りの体積力
 $\{\epsilon\}$; 仮想変位に対するひずみ
 $\{\sigma\}$; 応力

とする。

次に、節点力を $\{f_g\}$ 、節点変位を $\{\delta_g\}$ とし、節点力のなす仕事 $\{\delta_g\}^T \cdot \{f_g\}$ が表面力 $\{P\}$ のなす仕事と等しくなるように節点力を定める。 $\{\delta_g^*\}$ を仮想節点変位とし、要素の厚さを h 、面積を A とすると、式(1)は

$$\{\delta_g^*\}^T \{f_g\} = h \cdot A \cdot \{\epsilon\}^T \cdot \{\sigma\}$$

となる。また、変位とひずみの関係は

$$\{\epsilon\} = [B] \cdot \{\delta_g\}$$

と表わすことが出来る。ここで、 $[B]$ は

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \\ x_k - x_j & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_i & x_j - x_i & y_i - y_j \end{bmatrix}$$

である。ただし、 (x_i, y_i) 、 (x_j, y_j) 、 (x_k, y_k) は任意の要素における節点の座標である。

応力とひずみの関係はよく知られているように

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\epsilon\}$$

で表わされる。

以上のことより

$$\{f_g\} = (h \cdot A \cdot [B]^T \cdot [D] \cdot [B]) \cdot \{\delta_g\} \quad (2)$$

となり、これが任意の要素における剛性方程式である。

また、

$$\{k_g\} = h \cdot A \cdot [B]^T \cdot [D] \cdot [B]$$

とおくと、式(2)は

$$\{f_g\} = \{k_g\} \cdot \{\delta_g\} \quad (3)$$

となる。この $\{k_g\}$ を剛性マトリックスという。

故に、この式(3)を解くことにより、節点力および節点変位を求めることが出来る。よって、これを解析モデル1の全部の要素について行えば、変位および応力を求めることが出来る。

3.2 境界要素法

解析モデル2において、任意の要素 m について、節点を P_0 とすると、境界積分方程式を用いて、節点変位 $U(P_0)$ を導くと

$$\frac{1}{2} U(P_0) = \sum_{j=1}^M \int_{\sigma_j} \{ [W_x(P^i) U_{xx}(P^i, P_0) + W_y(P^i) U_{yx}(P^i, P_0)] - [W_{xx}(P^i, P_0) U(P^i) + W_{yx}(P^i, P_0) v(P^i)] \} ds(P^i)$$

となる。ここで、 W は表面力であり、添字は最初が成分を、次が方向を表すものとする。 P^i は要素 m 以外の要素上の任意の位置とし、 M は境界要素数である。

次に

$$\int_{\sigma_j} U_{xx}(P^i, P_0) ds(P^i) = B_{xx}^j$$

$$\int_{\sigma_j} U_{yx}(P^i, P_0) ds(P^i) = B_{yx}^j$$

$$\int_{\sigma_j} W_{xx}(P^i, P_0) ds(P^i) = A_{xx}^j$$

$$\int_{\sigma_j} W_{yx}(P^i, P_0) ds(P^i) = A_{yx}^j$$

とおき、

$$U^j = \begin{bmatrix} u^j \\ v^j \end{bmatrix}$$

$$W^j = \begin{bmatrix} W_x^j \\ W_y^j \end{bmatrix}$$

とおくと、

$$\frac{1}{2} U^j = \sum_{i=1}^M (B_{ij}^j W^i - A^{*ij} U^i)$$

となり、これを整理すると

$$\sum_{j=1}^M (A^j U^j - B^j W^j) = 0$$

と表わすことができる。

これを解析モデル2のすべての節点について計算すれば、節点における変位と表面力を求めることができる。次に、解析モデル内の任意の R 点における変位と応力については、次のように求めることができる。

$$U(R) = \sum_{j=1}^M \int_{\sigma_j} \{ [W_x(P^j) U_{xx}(P^j, R) + W_y(P^j) U_{yx}(P^j, R)] - [W_{xx}(P^j, R) U(P^j) + W_{yx}(P^j, R) v(P^j)] \} ds(P^j)$$

ここで、

$$\overline{B}_{lm}^j = \int_{\sigma_j} U_{lm}(P^j, R) ds(P^j)$$

$$\overline{A}_{lm}^j = \int_{\sigma_j} W_{lm}(P^j, R) ds(P^j)$$

とおくと、

$$[U]_R = \sum_{j=1}^M (\overline{B}^j W^j - \overline{A}^j U^j)$$

となり、任意の点 R における変位を求めることができる。

境界内の応力についても同様に、

$$\sigma_{xx}(R) = \sum_{j=1}^M \{ W_x(P^j) \int_{\sigma_j} T_{xx}(P^j, R) ds(P^j) - W_y(P^j) \int_{\sigma_j} T_{yx}(P^j, R) ds(P^j) - U(P^j) \int_{\sigma_j} S_{xxx}(P^j, R) ds(P^j) - v(P^j) \int_{\sigma_j} S_{yxx}(P^j, R) ds(P^j) \}$$

$$- W_y(P^j) \int_{\sigma_j} T_{yx}(P^j, R) ds(P^j)$$

$$- U(P^j) \int_{\sigma_j} S_{xxx}(P^j, R) ds(P^j)$$

$$- v(P^j) \int_{\sigma_j} S_{yxx}(P^j, R) ds(P^j) \}$$

$\sigma_{yy}(R)$, $\tau_{xy}(R)$ についても同様である。

ここで、

$$\overline{T}_{klm}^j = \int_{\sigma_j} T_{klm}(P^j, R) ds(P^j) = \overline{T}_{kml}^j$$

$$\overline{S}_{klm}^j = \int_{\sigma_j} S_{klm}(P^j, R) ds(P^j) = \overline{S}_{kml}^j$$

とおくと、

$$[\sigma]_R = \overline{T} W^j - \overline{S} U^j$$

となる。

以上より、解析モデル2の境界内の任意へ点 R における変位と応力を求めることができる。

4. 計算結果および考察

4.1 解析モデル1の場合

解析モデル1の場合については、き裂を持たない半無限弾性体として考えていることより、荷重位置は図1に示した①の位置(中央)に有限要素法および境界要素法ともに、垂直荷重 P と摩擦力 $F = \mu P$ を負荷した。摩擦係数 μ は0.0, 0.1, および0.3の場合について

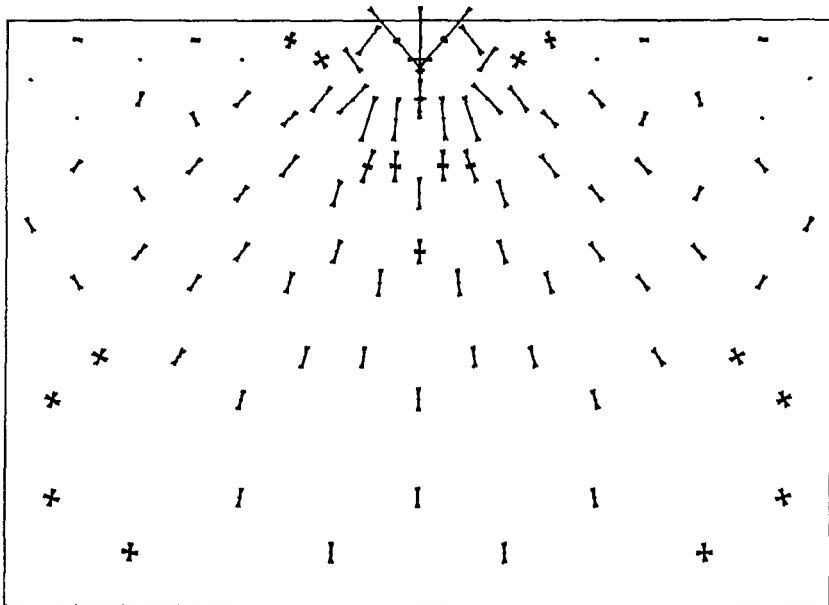


図3 $\mu=0.0$ の場合

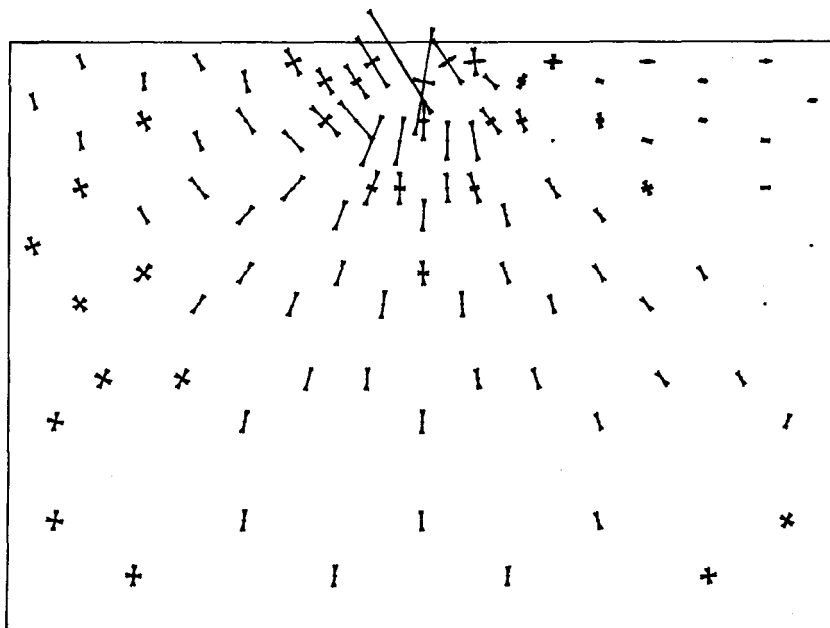


図4 $\mu=0.3$ の場合

表1 境界要素法計算結果

深さ	応力値
10	-5.44078
20	-2.91091
50	-1.24740
80	-0.79759
100	-0.63420
150	-0.43472
250	-0.27117

て計算を行った。有限要素法を用いて、 $\mu=0.0$ および $\mu=0.3$ の場合の計算結果を図3と図4に示す。ここで、図の矢印の位置は各要素の図心に表示したものである。 $\mu=0.0$ の場合についてみると、要素番号29と30の位置で最大となり、その値は-1.5988である。図心の位置は表面より30mmのところである。

境界要素法の場合では、 $\mu=0.0$ の場合における値は表1のようになった。ここで深さは表面からの深さである。この結果を比較してみると、両方法とも大体近い値を示していることが分る。しかし、有限要素法の場合には、要素内では応力が一定と仮定しており、任意の位置での値を求めることが出来ない。以上より本研究の場合については、任意の内点の応力値が計算出来る境界要素法の方が有利であるといえる。

4.2 解析モデル2の場合

解析モデル2の場合については、初期き裂をU字形でシミュレートし、その位置を中央にして、幅 b と深さ l を種々変化させて計算を行った。また、荷重位置は、図2に示したように②から⑦の位置に荷重し、⑧は④と⑤の位置にそれぞれ $\frac{1}{2}P$ と $\frac{1}{2}F$ を同時に荷重した。図5に $b=0.5$ mm, $l=1$ mm の場合に対して、

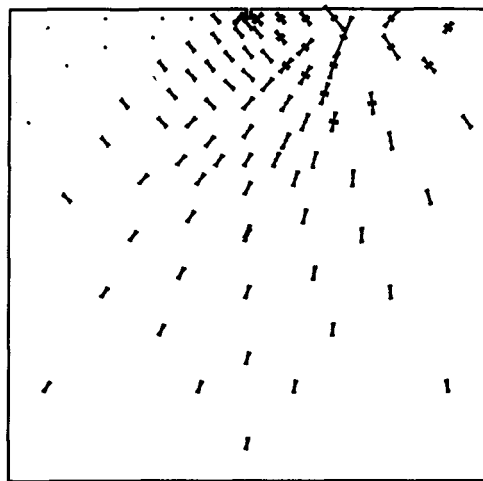


図5 荷重位置② ($\mu=0.0$, $b=0.5$ mm, $h=1$ mm)

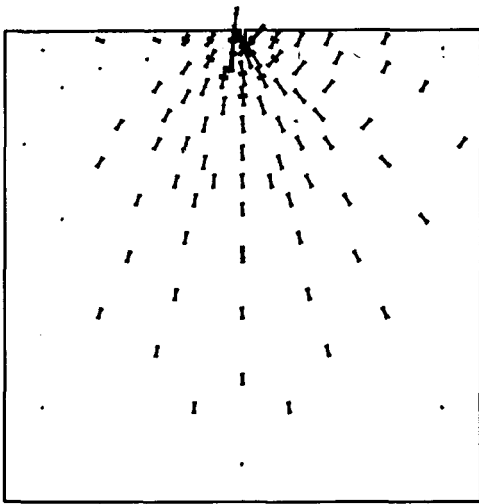


図6 荷重位置⑤ ($\mu=0.3, b=0.5 \text{ mm}, h=1 \text{ mm}$)

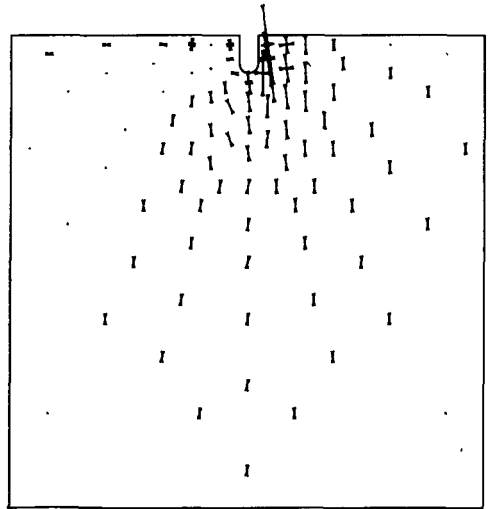


図8 荷重位置④ ($\mu=0.3, b=2 \text{ mm}, h=4 \text{ mm}$)

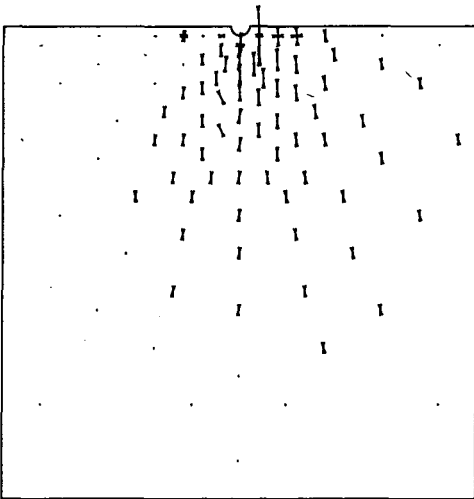


図7 荷重位置④ ($\mu=0.3, b=2 \text{ mm}, h=1 \text{ mm}$)

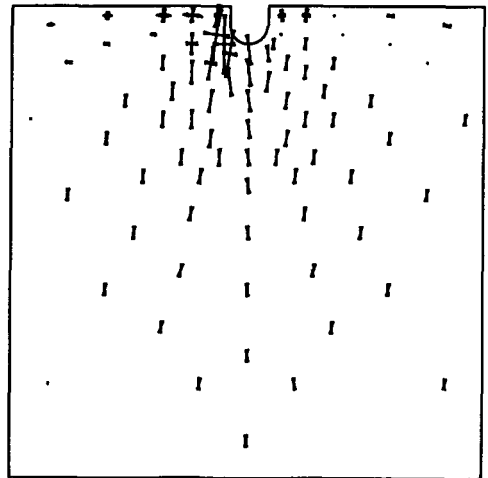


図9 荷重位置⑤ ($\mu=0.3, b=4 \text{ mm}, h=4 \text{ mm}$)

荷重位置②に垂直荷重 P のみ ($\mu=0.0$) を作用させた時の応力図を示す。応力の最大となる所は荷重位置付近で最大となっている。また、き裂付近ではあまり大きな差は見られない。図6に図5と同じき裂の大きさに対して、荷重位置⑤に P と $\mu=0.3$ の摩擦力を作用させた時の応力図を示す。この場合でもやはり応力が最大となるのは荷重位置近くであるが、き裂の先端部分にも大きな応力が発生していることが分る。次に $b=2 \text{ mm}, h=1 \text{ mm}$ の場合について、荷重位置④に P

を $\mu=0.3$ の摩擦力を作用させた時の応力図を図7に示す。この場合についても最大の応力となっているのは荷重直下である。図8に $b=2 \text{ mm}, h=4 \text{ mm}$ で荷重位置④で $\mu=0.3$ の場合を示す。この場合も最大応力は荷重直下であるが、き裂の荷重側にかなり大きな応力が発生している。次に図9に $b=4 \text{ mm}, h=4 \text{ mm}$, 荷重位置⑤, $\mu=0.3$ の場合を示す。この場合も最大応力は荷重直下であるが、この応力とほぼ等しい大きさの応力がき裂の荷重側で発生している。

以上のように、荷重を②から⑧までそれぞれに単独に作用させた場合には、どの場合にも荷重直下で最大応力となっている。

しかしながら、実際には接触は連続して移動し、これを繰返している。故に一点に荷重を作用させただけでは、ころがり一すべり接触をシュミレートしたとはいえない。つまり、荷重を連続的にしかも繰返し作用させるべきである。そこで、本研究では荷重を②から⑧まで作用させ、それを重ね合わせることで、接触をシュミレートした。重ね合わせる応力としては、図2における内点番号14, 32, 72, 80, 37, 38の点とした。図10に $b=0.5\text{ mm}$, $h=1\text{ mm}$ の場合についての結果を

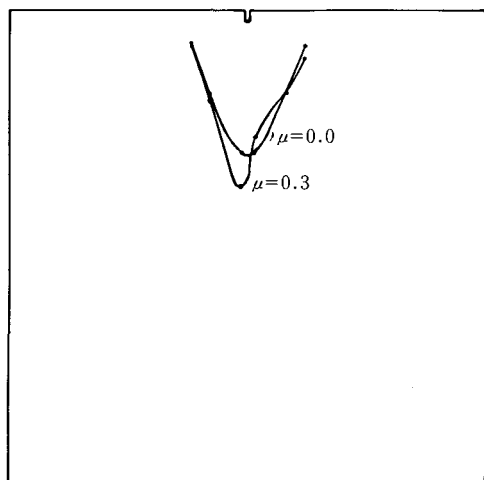


図10 $b=0.5\text{ mm}$, $h=1\text{ mm}$ の場合

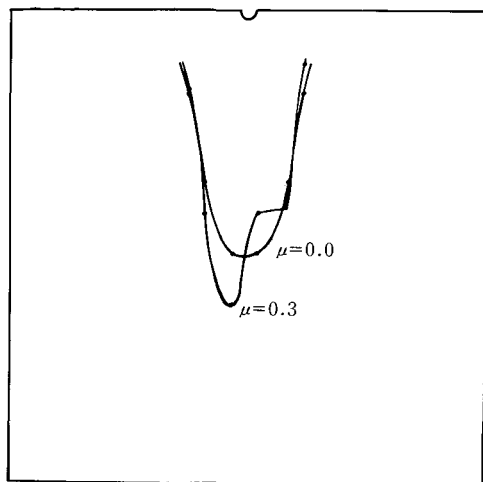


図11 $b=2\text{ mm}$, $h=1\text{ mm}$ の場合

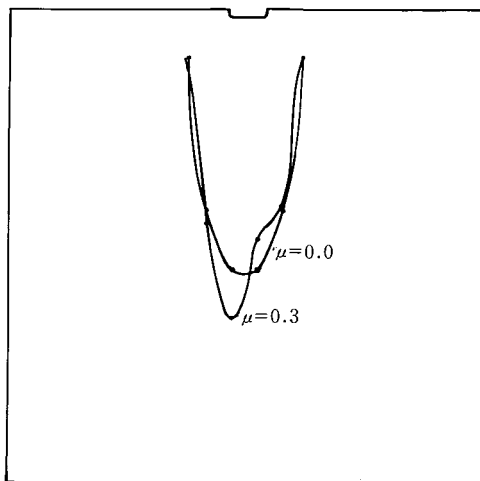


図12 $b=4\text{ mm}$, $h=1\text{ mm}$ の場合

示す。 $\mu=0.0$ の場合については、当然き裂ははさんで対称となっているが、応力は内点番号72と80の位置で最大となっている。 $\mu=0.3$ の場合には内点番号80の所で最大となり、内点番号72では $\mu=0.0$ の場合より小さくなっている。次に図11に $b=2\text{ mm}$, $h=1\text{ mm}$ の場合を、また図12に $b=4\text{ mm}$, $h=1\text{ mm}$ の場合を示す。この両方の場合とも、図10の場合と同様の傾向を示しているが、 $\mu=0.0$ の場合には、内点番号72と80の所で最大となり、その値は $b=0.5\text{ mm}$ の場合の約1.7倍から1.8倍の値となっている。そして、 $\mu=0.3$ の場合も内点番号80の所で最大となり、やはりその大きさは $b=0.5\text{ mm}$ の場合の1.7倍から1.8倍となっている。また、図には示していないが、 $b=0.5\text{ mm}$ で $h=4\text{ mm}$ の場合の結果をみると、図11, 図12とほぼ同じ値を示している。

5. 結 言

以上き裂をもたない半無限弾性体の場合と初期き裂をU字形でシュミレートした場合について解析を行ったが、き裂をもたない場合については、解析手法として有限要素法を境界要素法の二つを用いて解析を行った。物体内部の応力解析を行なうには境界要素法の方が有利であることが分る。初期き裂をもつ場合については境界要素法を用いた。この結果より、き裂の進展はき裂の幅および深さが小さい場合にはゆるやかで、き裂の幅が大きくなるか、または深さが深くなると急速に進展して行くと思われる。そして、摩擦力はき裂の進展および方向の両方に影響していることが分る。

なお数値計算には本学電子計算機センターの HITACM-160H を使用した。

最後に、本研究を進めるにあたり貴重なご助言およびご指導を賜った本学工学部山下尚義助教授に心より謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 山本・阪倉・大前・築添：潤滑，26，4（1981），269.
- 2) 山本・阪倉・大前・築添：潤滑，26，6（1981），410.
- 3) C. A. プレビア/S. ウォーカー（神谷他訳）；境界要素法の基礎と応用，培風館（1981）.
- 4) 田中正隆：機械の研究，養賢堂，34，4（1982），72.
- 5) C. A. Brebbia: Boundary Element Methods, Springer-Verlag (1981), 239.
- 6) 山下，片山：潤滑，21，10（1976），676.