

# 表面に周期的に分布する半だ円体状の接触圧力 による半無限弾性体内部の応力解析

(第2報 接触面の形状寸法と周期の比の影響について—  
数値解析結果)

片 山 剛之丞・山 下 尚 義

## The analysis of stress distribution in a semi-infinite elastic body by periodically spaced semi-ellipsoid contact pressures

(2nd Report Effect of the ratio of the size of contact area to the spacing  
of load bearing asperities—Numerical calculations)

By Gonojo KATAYAMA and Naoyoshi YAMASHITA

The classical theory of contact between elastic bodies was first published by H. Hertz in 1881. The problem actually solved by Hertz, however, was a very restricted one; it concerned two elastic bodies in static contact under the action of a steady resultant force acting normal to the tangent plane at the point of contact. The surfaces of the two bodies are assumed to be smooth and continuous in the neighbourhood of the region of contact, with radii of curvature which are large compared with the actual dimensions of the contact area. It is immediately clear that the Hertzian analysis cannot hold for rough surfaces.

The designer is frequently confronted with the problem of estimating the appropriate value for the allowable contact pressure in gears, or anti-friction bearings. One of reasons for this difficulty is the lack of the knowledge for the effect of surface roughness on the contact fatigue.

In the previous report, we derivated the theoretical equations for the stress field in a semi-infinite elastic body by normally loaded, periodically spaced semi-ellipsoid pressures. It is intended that this model represent the contact problem of two nominally flat surfaces. One of the surfaces was assumed to be covered with asperities whose tips were represented by the ellipsoid of the same height.

The effect of spacing of load-bearing asperities and the form and sizes of contact areas upon the state of stress within the body is studied. It is shown that the maximum octahedral shear stress occurs at the surface as the contact-spot spacing becomes small. Further, as the neighbour asperities approach together, the magnitude of tensile stress at the circumferential point of a circular contact on the surface becomes large.

We discuss the variation of two shear stresses near the surface under the rolling

motion. It is shown that the amplitude of the shear stress acting on a  $Z=\text{const.}$ -plane is larger than one of the shear stress acting in a direction inclined at an angle of 45 deg. to the direction of the two principal stress. Thus, it is suggested, from the above numerical calculations, that damage to the surface of curved elastic pairs in contact under cyclic loading starts from the point of very shallow depth below the surface.

## 1. まえがき

接触することによって機能を果たす重要な機械要素としては、歯車、ころがり軸受、カムとフォロワー、ピストンリング等があげられる。たとえば動力伝達用歯車の強度設計に対しては、(1)歯元の疲れ強度、(2)歯面のピッチング強度、(3)過熱と焼けつきなどの各項目について検討が行なわれる。しかし実際には歯車の強度設計を行なう場合にあらゆる歯車に対して上記全項目の一つ一つを詳細に検討することはまれであり<sup>1)</sup>、一般には硬さの高い歯車ではピッチングよりも曲げの力による疲れ破損の危険度が高いので(1)が歯車寸法を決定する項目となり、硬さがそれ程高くない歯車では曲げの力に比較して接触応力によるピッチングの発生する危険度が高くなるので(2)が歯車寸法を決定する項目となる。

従来ピッチングに対する許容応力の表示には、相対する二つの歯面にはアラサが無く、潤滑油も存在しない古典的なヘルツ最大応力を基準として採用してきた。したがって歯車の強度設計の厳密化のためには、アラサが物体内部に与える影響について定量的に把握しておくことがぜひとも必要である<sup>2)</sup>。このことはピッチングの発生機構を究明する目的で行なわれている各種の2円筒ころがり試験においても不可欠な事柄である。

弾性学でいうサン・ブナンの原理<sup>3)</sup>により、弾性体

の小面積に作用する外力をこれと静的に等価な他の外力でおきかえても、外力が作用する箇所の付近の応力分布は局部的に変化するが、外力が作用する箇所の大きさに比較して十分離れた箇所の応力分布はほとんど影響されないことがわかっている。

一方、ピッチングき裂が最初に発生する位置に関しては古くから多くの論争があり、現在でも明確にされてはいないが、実験的に観察される結果からは、最初に発生する位置が表面と断定できないまでも、非常に浅い位置であることは確実なことである<sup>4) 5)</sup>。したがって上述のサン・ブナンの原理とも関連して、外力を分散させた場合の表面下ごく浅い層の応力変化を調べておくことが必要である。

本報告は前報<sup>6)</sup>で求めた理論式をもとに、弾性体内部の応力状態に与える接触面の形状、周期の影響について数値計算を行なった結果について報告する。

## 2. 数値計算のための準備

前報の図式で示された応力式と係数  $Q_{nm}$  を計算するために、式を無次元化する。

$$b/a = \lambda, \quad x/b = X, \quad y/b = Y, \quad z/b = Z, \\ l_x/a = C_x, \quad l_y/b = C_y$$

とおくと、

$$x/l_x = X/\lambda \cdot C_x, \quad y/l_y = Y/C_y \\ \omega = \pi/b\sqrt{(n/\lambda \cdot C_x)^2 + (m/C_y)^2}$$

となり、係数および応力式は次のようになる。

$$Q_{nm} = \frac{4q_0}{\lambda C_x C_y} \int_0^{\lambda \sqrt{1-Y^2}} \int_0^{\lambda \sqrt{1-Y^2}} \sqrt{1-(X/\lambda)^2 - Y^2} \cdot \cos \frac{n\pi X}{\lambda C_x} \cdot \cos \frac{m\pi Y}{C_y} \cdot dXdY \quad \dots\dots(1)$$

$$\sigma_x = - \sum \sum Q_{nm}' \left\{ 2\nu + \frac{n^2}{n^2+m^2} (1-2\nu - B_z \cdot Z) \right\} e^{-B_z \cdot Z} \cdot \cos \frac{n\pi X}{\lambda C_x} \cdot \cos \frac{m\pi Y}{C_y} - \frac{1}{1-\nu} Q_{00}' \\ \sigma_y = - \sum \sum Q_{nm}' \left\{ 2\nu + \frac{m^2}{n^2+m^2} (1-2\nu - B_z \cdot Z) \right\} e^{-B_z \cdot Z} \cdot \cos \frac{n\pi X}{\lambda C_x} \cdot \cos \frac{m\pi Y}{C_y} - \frac{1}{1-\nu} Q_{00}' \\ \sigma_z = - \sum \sum Q_{nm}' (1+B_z \cdot Z) e^{-B_z \cdot Z} \cdot \cos \frac{n\pi X}{\lambda C_x} \cdot \cos \frac{m\pi Y}{C_y} - Q_{00}' \\ \tau_{xy} = \sum \sum Q_{nm}' \cdot \frac{n \cdot m}{n^2+m^2} (1-2\nu - B_z \cdot Z) e^{-B_z \cdot Z} \cdot \sin \frac{n\pi X}{\lambda C_x} \cdot \sin \frac{m\pi Y}{C_y} \\ \tau_{yz} = - \sum \sum Q_{nm}' \cdot \frac{m}{\sqrt{n^2+m^2}} \cdot B_z \cdot Z \cdot e^{-B_z \cdot Z} \cdot \cos \frac{n\pi X}{\lambda C_x} \cdot \sin \frac{m\pi Y}{C_y} \\ \tau_{zx} = - \sum \sum Q_{nm}' \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}} \cdot B_z \cdot Z \cdot e^{-B_z \cdot Z} \cdot \sin \frac{n\pi X}{\lambda C_x} \cdot \cos \frac{m\pi Y}{C_y} \quad \dots\dots(2)$$

$$\sigma_e q^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] \dots \dots \dots (3)$$

ここで、

$$B_x = \pi/2\sqrt{n^2 + m^2}$$

$$Q_{nm}' = \lambda_{nm} \cdot Q_{nm}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{nm} = \frac{1}{4} ; n=m=0 \\ = \frac{1}{2} ; n, m \text{ いずれか } 0 \\ = 1 ; n>0, m>0 \end{array} \right.$$

である。

上式は一般的な場合についての式であり、円の場合には  $a=b(\lambda=1)$  である。(1)式の係数  $Q_{nm}$  の二重積分の計算はシンプソンの公式を使用し、積分区間の  $n$  等分の幅  $\Delta Y$  を決定するために、 $n=m=0$  の特別な場合は(1)式を解析的に解くことが可能でその値は  $\pi/6$  となり、 $\Delta Y=0.1, 0.05, 0.02, 0.005$  で計算するとそれぞれの値は、0.5184, 0.5205, 0.5222, 0.5232となり、この場合の相対誤差は約1.0%, 0.6%, 0.3%, 0.07%である。我々が要求する精度は有効数字3桁までであり、また計算機(HITAC-8150)の容量および計算時間を考慮し  $\Delta Y=0.02$  を採用し、同じ理由によ

って(2)式の多項式は  $n=m=8$  の計64項を使って計算した。

### 3. 数値計算および考察

数値計算は接触面の形状を円とだ円の場合について種々の周期について行った。図1は接触面の形状が円の場合について、(a)半無限体に円1個の理想的なヘルツの接触圧力が働く場合、(b)周期が  $C_x=l_x/a=2.0, C_y=l_y/b=2.0$  の場合の表面( $z=0$ )に接触圧力が働く場合、(c)周期が  $C_x=l_x/a=1.0, C_y=l_y/b=1.0$  の場合の表面に接触圧力が働く場合の様子を示したものである。

まず最初に  $n=m=8$  の計64個を採用した場合の表面での境界条件の満足度を示したのが図2で  $\lambda=a/b=1.0, C_x=C_y=2.0$  の場合で図1の(b)に該当する。図3はやはり接触面の形状が円で、 $\lambda=1.0, C_x=C_y=1.0$  の場合で図1の(c)に対応する。図2・図3は  $x$  方向の変化を示したもので、どちらも  $x=\pm a$  の接触端でいくぶん  $\sigma_x$  の値がのこっているが全体としてはかなり精度よく境界条件を満足している。図4・図5は接触面の形状がだ円で、 $\lambda=10.0, C_x=2.0, C_y=1.0$  の場合の境界条件の満足度を示したもので、図4では

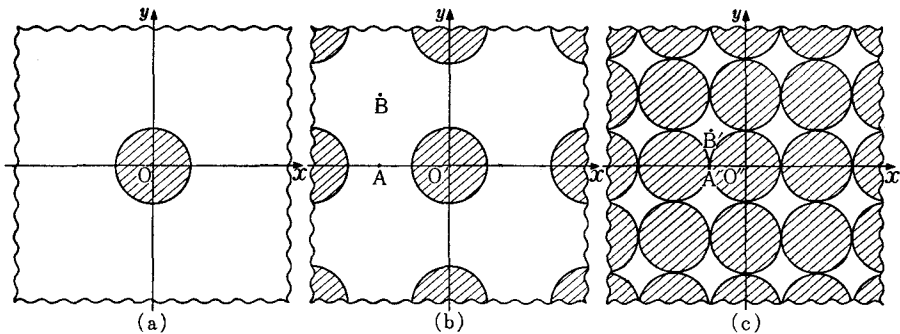


図1 接触面の形状と周期

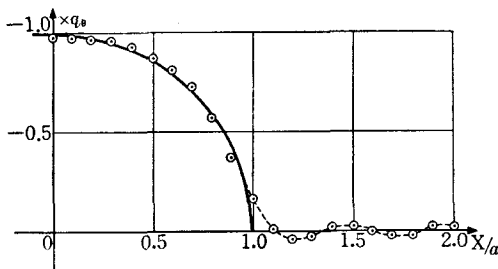


図2 周期  $C_x=C_y=2.0$  の  $x$  方向の近似度

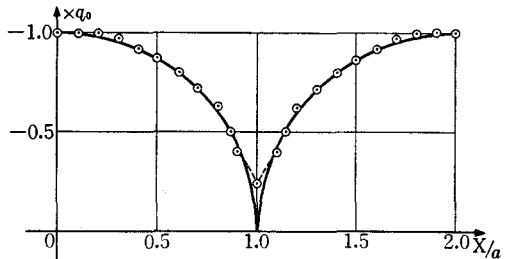


図3 周期  $C_x=C_y=1.0$  の  $x$  方向の近似度

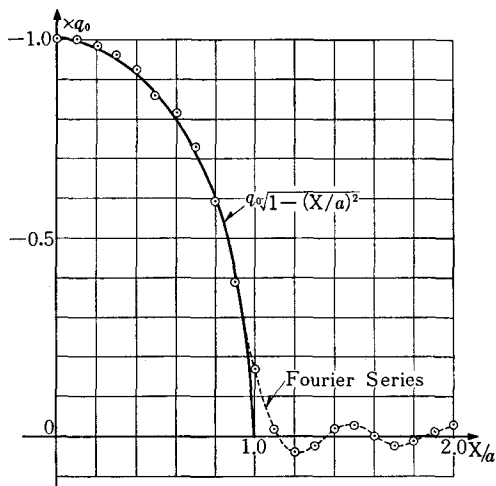


図4 接触面形状がだ円の場合の  $x$  方向の近似度

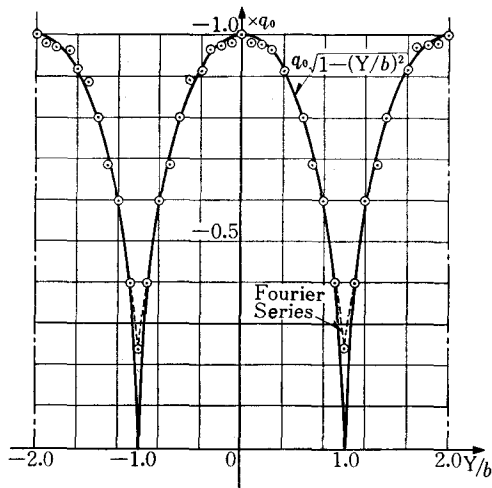


図5 接触面形状がだ円の場合の  $y$  方向の近似度

$x$  方向の変化を示しやはり  $x = \pm a$  では  $\sigma_z$  の値がいくぶん残り、図2と同様  $|x| > a$  の接触外では小さな振幅で正負に振れている。図5は  $y$  方向の変化の様子を示したもので  $y = \pm b$  で完全に0になっていないが、図4と同じく全体としてはほぼ理論値をよく表わしていることがわかる。

図6・図7・図8は断面内部の応力の大きさが周期によってどのように変化するかそのだいたいの傾向を見るために、(8)式で計算される八面体せん断応力の等高線を示したものである。図6は図1(a)で接触面の形状が円1個の場合の理想的なヘルツ圧力分布の場合<sup>7)</sup>、図7は接触面の形状が円で周期が  $C_x = C_y = 2.0$

の場合、図8は接触面の形状が円で周期が  $C_x = C_y = 1.0$  の場合である。図に示される数値はそれぞれ最高圧力  $p_0$ 、 $q_0$  に対する比が示されている。

まず理想的なヘルツの圧力状態を周期が円の直径の2倍の図6・図7を比較すると、 $\sigma_{eq}$  の最大になる深さがいずれも  $z = 0.5a$  で、その値はそれぞれ0.360、0.363 とほとんど差がないことがわかる。両者の等高線にいくぶん有意差が認められてくるのは深さが半径以上 ( $z \geq 1.0a$ ) になってからで、これ以上の深さにな

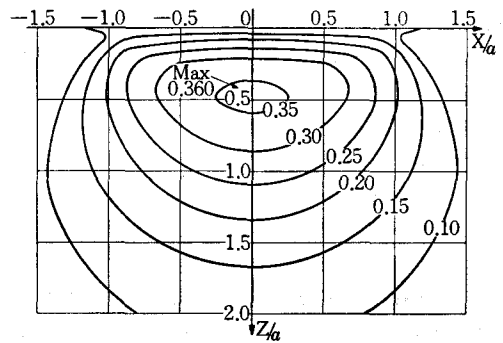


図6 図1(a)の  $\sigma_{eq}$  の等高線

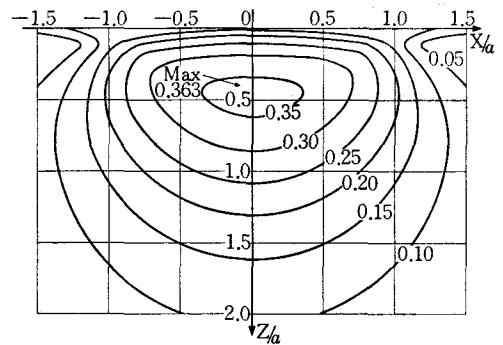


図7 図1(b)の  $\sigma_{eq}$  の等高線 ( $C_x = C_y = 2.0$ )

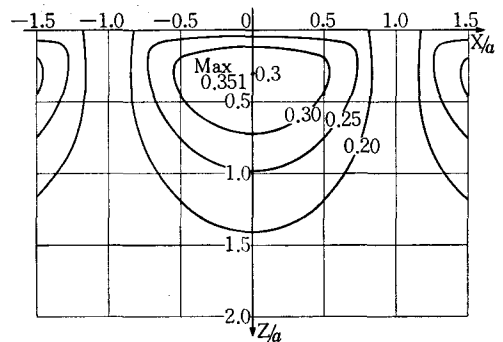


図8 図1(c)の  $\sigma_{eq}$  の等高線 ( $C_x = C_y = 1.0$ )

って始めて隣の接触圧力の影響がではじめていることがわかる。これは周期に比較して浅い深さでは隣の接触圧力の影響がほとんどないことを示している。次に周期が直径と等しい図8の場合には、前の図6・図7とかなり様子が異なっていて、 $\sigma_{eq}$ が最大になる深さが $z=0.3a$ でその値は0.351である。周期が短くなってくると、 $\sigma_{eq}$ の最大値が浅くなる傾向にあるのは表面接触疲れき裂の発生位置と関連して注目される場所である<sup>8)</sup>。

次に図9・図10・図11・図12・図13・図14・図15はそれぞれ深さ方向( $z$ 方向)における $\sigma_x$ ・ $\sigma_z$ の図である。図9は図1(a)の円1個の場合の0点における $z$ 方向の理論値である。図10・図11・図12は図1(b)の周期が $C_x=C_y=2.0$ のときで、図13・図14・図15は図1(c)の周期が $C_x=C_y=1.0$ の場合である。図10は図1(b)のO'点、図13は図1(c)のO''点における深さ方向

の図である。図9と比較すると、 $\sigma_z$ は図10では $z=1.0a$ までは全んど変わらないが、 $z>1.0a$ になると周期の影響が出て値は大きくなっている。図13では $z=0.5a$ までは全んど変わらないが、 $z>0.5a$ になると周期の影響が出てやはり $\sigma_z$ の値は大きくなり図10と比較してもかなり大きい。次に $\sigma_x$ については図10ではやはり $z<1.0a$ ではほとんど図9と変わらず、 $z>1.0a$ で値の方も少し大きくなっている。図13では $z=0.3a$ までは図9の値よりも小さく、 $z>0.3a$ で大きくなっている。図11は図1(b)のA点、図14は図1(c)のA'点の図である。図11では $z=0.5a$ までは $\sigma_z$ ・ $\sigma_x$ はほとんど0であり周期の影響はないものと思われるが、 $z>0.5a$ で周期の影響から0より大きな値となる。図14では $z=0$ の表面では $\sigma_x$ の値は引張応力となっている。図12は図1(b)のB点、図15は図1(c)のB'点の図でありこれらの点は接触していない点である。図12

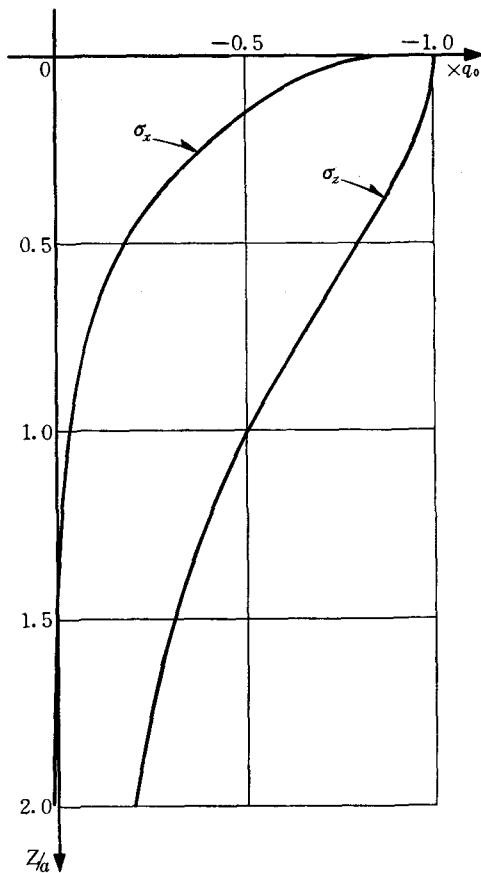


図9 図1(a)の0点における深さ方向の応力変化

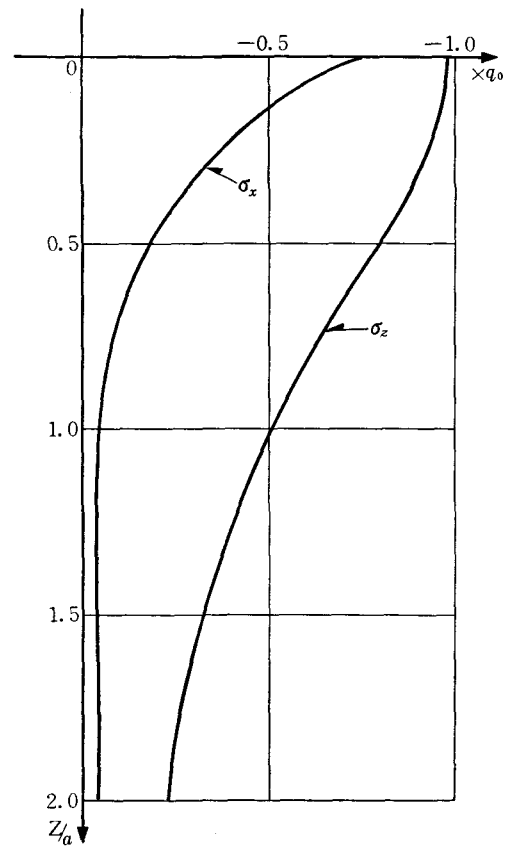


図10 図1(b)のO'点における深さ方向の応力変化

では  $z=0.5a$  までは  $\sigma_z=0$  で、 $\sigma_x$  は小さな引張応力があり、 $z>0.5a$  で  $\sigma_z$  の値は大きくなり、 $\sigma_x$  は圧縮応力となる。図15では  $z=0.2a$  までの深さでは  $\sigma_z=0$  で、 $\sigma_x$  は図12より大きな引張応力となっている。このことから深さ方向についても周期が短い方がより浅い位置で影響が出て来ている。

これらの結果をみて注目されることは、接触面の表面状態を周期的に分布した高さの等しい半球形からなるものと考えたと<sup>9)</sup>、摩擦力がなくても法線方向の圧縮荷重のみで浅い表面層に引張応力が存在することで、図1(c)のA'、B'点ではそれぞれ図14、図15よりその大きさが約  $0.2 \times q_0$  の値となっていることがわかる。とくに図1(b)、(c)で外部からの接触圧力からもっとも離れた点、BとB'点での応力状態を比較してわかるように、図1(b)のB点ではほとんどの応力成分も零であるにもかかわらず(図12)、周期が短くなった

図1(c)のB'点では同じく外部圧力は表面で零であるにもかかわらず、かなりの大きさの応力、とくに表面では約  $0.2 \times q_0$  の引張応力になっていることはき裂の発生、伝播に関連して注目される結果<sup>10)</sup>である。

次に前報、図1に示すようにころがり一すべり接触をする2円筒は接触域でのみ上に示したような応力を受け、それ以外では荷重は存在しないから無応力状態である。したがって接触法線荷重が一定であつてもころがり運動を行なう物体は応力の履歴を受けることになる。その応力変化の状態を  $z=0.5a$  の深さにおける、図1(b)と(c)の場合について示したのが図16・図17である。両者において、 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$  はいずれも圧縮でかなり大きいからこの応力も接触面の破壊に関係を持つと考えられる。しかしこれらはいずれも荷重点の移動とともに0と最大値との間に变化する片振応力である。また  $\sigma_z$  と  $\sigma_x$  の差の半分である  $\tau_{\max}$  が生じる

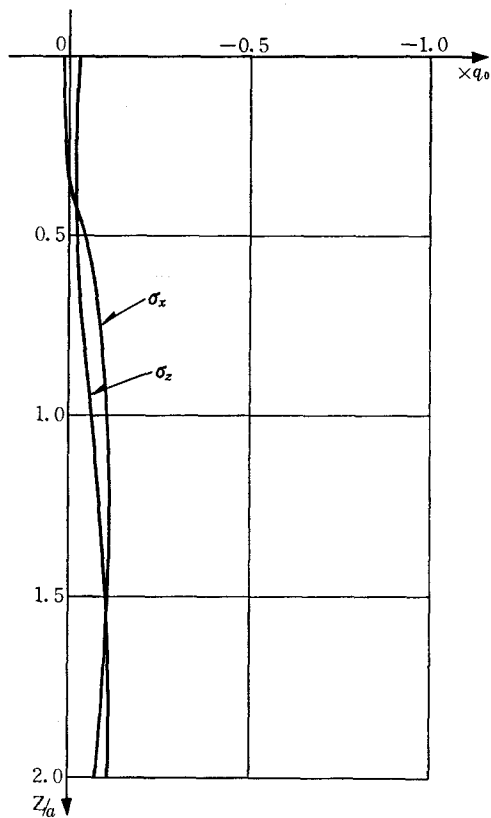


図11 図1(b)のA点における深さ方向の応力変化

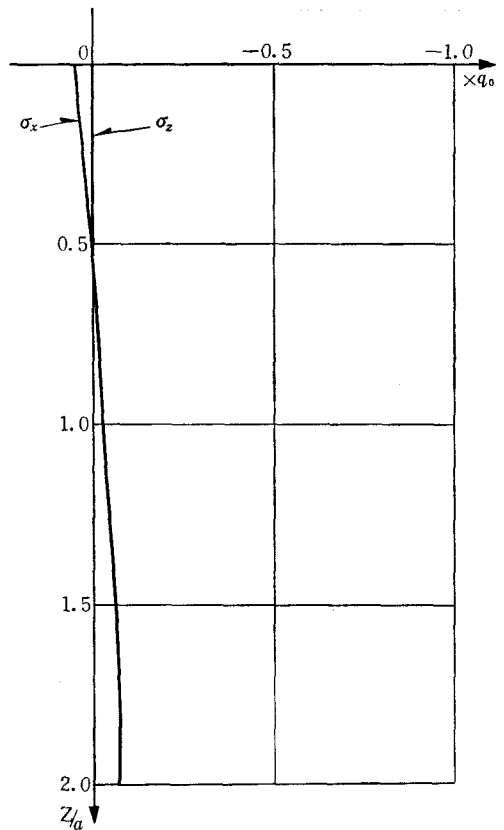


図12 図1(b)のB点における深さ方向の応力変化

点の  $\tau_{45}$  は応力の繰返しに従い、図16の場合  $-0.019 \times q_0$  とちょうど中央で生じる  $+0.314 \times q_0$  との間を変化する。 $\tau_{45}$  の変化は図には示さなかったけれどもほぼ片振に近い応力履歴を受けることがわかる。

一方  $z = \text{const.}$  で面上に  $x$  方向に作用するせん断応力（あるいは  $x = \text{const.}$  の面上で  $z$  方向に作用する応力） $\tau_{zx}$  は  $z$  軸上では零であるが、 $z$  軸上以外の点で最大になる様子は図に示すとおりである。 $\tau_{zx}$  は  $z$  軸を境として符号が異なるから、1回転を周期とする両振応力であり、その値は  $0.202 \times q_0$  となる。上に示した  $\tau_{45}$  あるいは  $\tau_{zx}$  のいずれが危険かは、材料の性質に依ることは勿論であるが、 $\tau_{45}$  の振幅が  $[0.314 - (-0.019)]/2 \approx 0.167$  となり  $\tau_{zx}$  の  $0.202$  より小さくなり、一般に材料は平均応力の大きさより両振の振幅の大きさにより影響を受ける<sup>11)</sup>から  $\tau_{zx}$  によるき裂発生の危険が一番大きいと推定され得る。

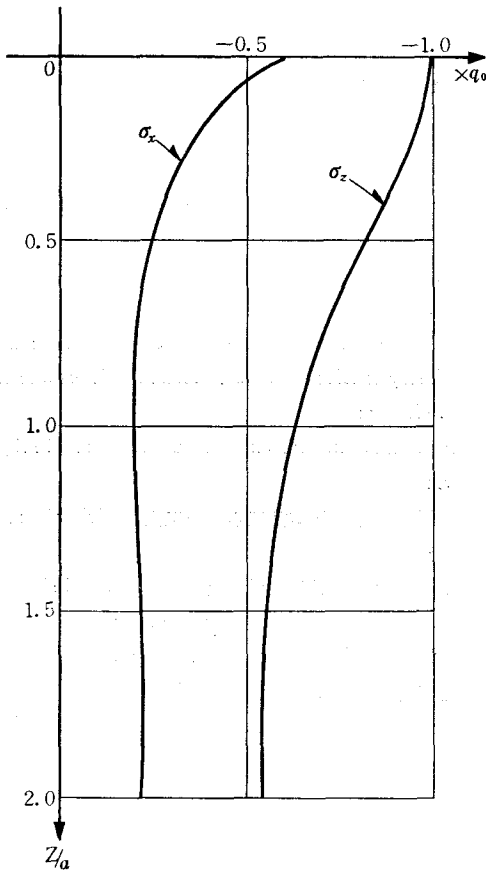


図13 図1(c)の0''点における深さ方向の応力変化

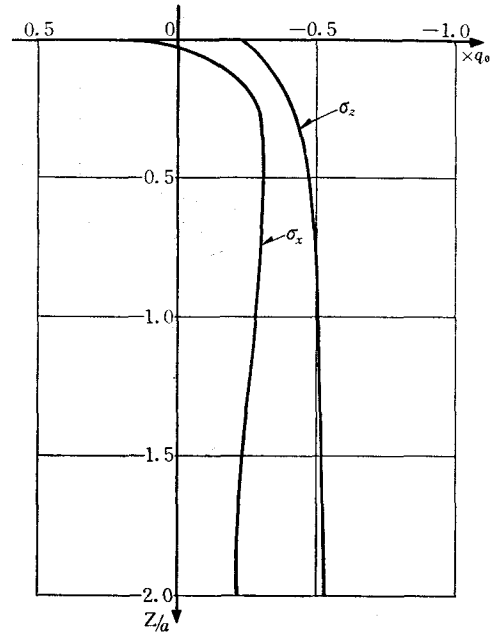


図14 図1(c)のA'点における深さ方向の応力変化

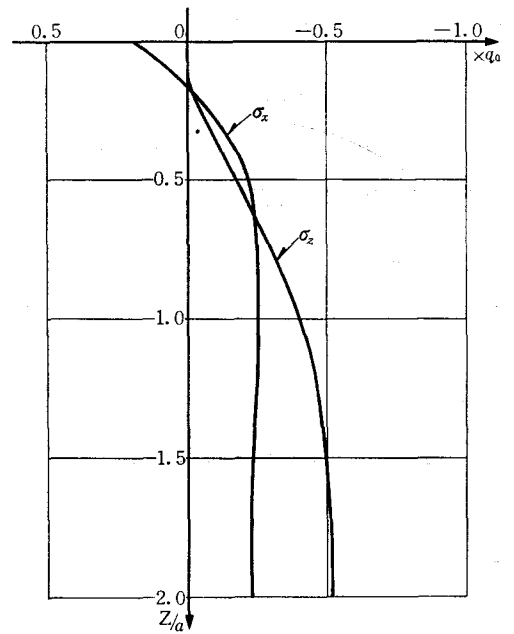


図15 図1(c)のB'点における深さ方向の応力変化

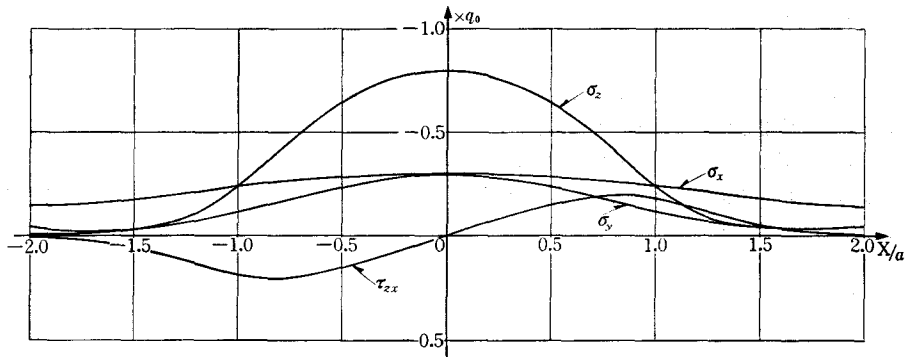


図16 図1(b)の深さ  $z=0.5a$  における応力変化

周期が短くなった図17の場合についても同様のことがいえ、この場合には図8より  $\tau_{45}$ ,  $\tau_{zx}$  の最大になる深さは  $z=0.3a$  近傍になることが予想されるが図16と比較するために、図17においても  $z=0.5a$  の場合を示している。 $z=0.3a$  の深さにおいて上述の  $\tau_{45}$ ,  $\tau_{zx}$  の変化を示すと、 $\tau_{45} = +0.062q_0 \sim +0.302q_0$ ,  $\tau_{zx} = \pm 0.122q_0$  となって図17の場合より値はいくぶん小さくなる。

したがって物体内部の応力状態に与える周期の影響を総合すると周期を短かくしていくと表面での引張応力の値は大きくなる代りに、繰返されるせん断応力の振幅はやや小さくなるのがわかる。

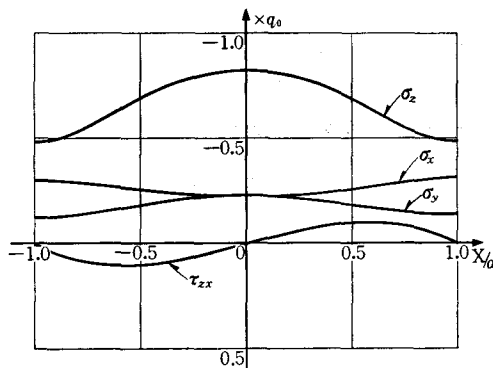


図17 図1(c)の深さ  $z=0.5a$  における  
応力変化

#### 4. 結 言

以上接触面の表面あらさを半球形と考えた場合の物体内部の応力状態について解析を行なったが、前報で述べたように、実際に接触部には必ず摩擦力が存在し、この摩擦力のき裂発生への影響は大きい<sup>12)</sup>ことが

予想される。接触面の形状がだ円状になった場合、接線力が重ね合わされた場合については今後順次検討していく予定である。おわりに数値計算は本学電子計算機 HITAC-8150 を使用した。計算に際して多大の便宜を計っていただいた室員の方々に深く感謝いたします。

#### 5. 参考文献

- 1) たとえば 仙波正莊：歯車伝動機構設計のポイント，日本規格協会（1974），116。  
D. W. Dudley: Practical Gear Design, McGraw-Hill (1954), 47.
- 2) 山下，片山：日本潤滑学会全国大会予稿集，(1975—11)。
- 3) たとえば S. P. Timosenko & J. N. Goodier: Theory of Elasticity, 2nd Edition, McGraw-Hill (1951), 33.
- 4) P. H. Dawson: Power Transmission, 30 (1961), 208.
- 5) 山下，平野：日本機械学会論文集，Vol. 37, 304 (1971), 2379.
- 6) 山下，片山：広工大研究紀要，Vol. 10 (1976)。
- 7) G. M. Hamilton & L. E. Goodman: Trans. ASME, Vol. 88, Ser. E (1966), 371.
- 8) 曾田範宗：軸受，岩波全書（1964），149.
- 9) J. A. Greenwood & J. H. Tripp: Trans. ASME, Vol. 89, Ser. E (1967), 153.
- 10) N. G. Kennedy: Proc. Int. Conf. on Fatigue Metals, (1956), 282, Inst. Mech. Engrs.
- 11) 石橋 正：金属の疲労と破壊の防止，養賢堂，(1967)，182.
- 12) 曾田範宗：潤滑，16, 10 (1971), 728.