九連環の解法に対する一考察

（機械工学分野）野村 高広，山田 祐士
（電気情報工学科）猪野 智基
（機械工学科）田中 光二郎，森下 凜，弘中 こころ

A Study on Solving Method of Chinese Ring

(Department of Mechanical Engineering) Takahiro NOMURA and Yuji YAMADA
(Department of Electrical Engineering and Information Science) Tomoki INO
(Department of Mechanical Engineering) Koujirou TANAKA, Rin MORISHITA and Kokoro HIRONAKA

Abstract

The Chinese ring is known as one of the difficult puzzles. We actually handmade this Chinese ring, examined the difficult reasons and found the following two main factors. First, it was to be two choices for "the first step". If it made a mistake in this first step, it indicated that it was a failure after many steps. Next, even if the "series of movements" of the solution was understood, it showed that confusion occurs on the way due to a huge number of steps. Furthermore, in order to understand the difficult factors, from the viewpoint of engineering, proposed a method to solve the Chinese ring. The method to visually organize using Excel was introduced. Also, the relationship between the number of links and the number of steps was introduced by a mathematical formula.

Key Words : Chinese ring, mechanical puzzle, educational toy, engineering education
九連環，メカニカルパズル，知育玩具，工学教育

§１　はじめに

世の中にはさまざまなパズルと呼ばれる知育玩具が存在し，世界中で老若男女を問わず親しまれている．その中でもスライド機構を有する「箱入り娘」，はめ込み構造を有する「孔明鎖」，回転軸を有する「ルービックキューブ」など，機械的な要素を利用したパズルを一般にメカニカルパズルとして分類されている[1]．

ここでは，古くからメカニカルパズルの代表とされる「知恵の輪」，その中でも「九連環」と呼ばれる知恵の輪に着目する．九連環とは９つのリング（円環）に収まった棹（細長い環）を取り除く知恵の輪である．図１に針金と板棒で製作した作例を示す．三国志に登場する諸葛亮孔明が考案したという説や，エレキテルで知られる平賀源内が日本人で最初に攻略したという説など，歴史的にも諸説の多い知恵の輪として知られている[1)~11)]．

知育玩具として良く知られるルービックキューブのようなパズルでは，初期状態から攻略状態に至るためには，様々な道筋が存在する．一方で，九連環は初期状態から攻略状態に至るまで一つの道筋しか存在しないため，一見すると単純なパズルである．それにも関わらず，九連環がルービックキューブと同じように難解なパズルの一つと位置づけられる要因について考察するとともに，工学的な視点から，攻略するための「解法の整理方法」や「解法手数の算出法」について紹介する．

図１　「九連環」の作例

§２　五連環

まずはリング数を５つに減らした五連環に着目する．図２は製作した五連環の一例である．５つの丸環に棹が全て絡まった状態であり，知恵の輪としては初期状態（スタート）となる．一方，図３は，棹が完全に分離した攻略状態（ゴール）となる．

五連環や九連環のような連環系の知恵の輪を考察する場合，基本となる「解法手順の整理方法」があると思考の助けになるとともに，応用形態に移行した場合の解法表示の整理につながる．

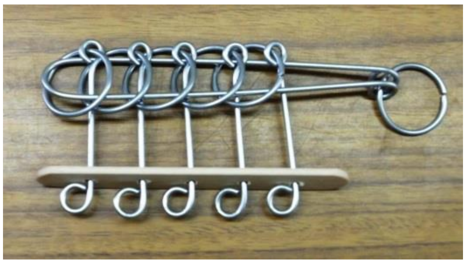
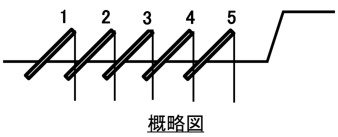


図２　「五連環」に棹が絡まった初期状態

図３　「五連環」の棹が完全に分離した攻略状態

図４に五連環を対象としたエクセルを使用した解法整理の一例を示す．まず，知恵の輪の概略図を上部に示しているが，５つの各環に対して番号付けを行う．ここでは左端の環を番号１とし，整理表の横軸が環の番号に対応している．環が棹に付いている状態を「○」，外れている状態を「×」の記号で区別し，各手数に応じた，五連環の解法手順の動きを縦軸に配置し，視覚的に分かる表記としている．また，各手において移動した環のみをグレーで色塗りすると，各手順において移動した環が認識でき，解法操作の「一連の動き」が分かり易くなる．五連環においては１６手で解法が終了する流れが見てとれる．



○：環が棹に付いている
×：環が棹から外れている

手数	1	2	3	4	5	備考
0	○	○	○	○	○	初期状態
1	×	○	○	○	○	１を外す（１と２を同時に外すと解けない）
2	×	○	×	○	○	３を外す
3	○	○	×	○	○	１を付ける
4	×	×	×	○	○	１と２を同時に外す
5	×	×	×	○	×	５を外す
6	○	○	×	○	×	１と２を同時に付ける
7	×	○	×	○	×	１を付ける外す
8	×	○	○	○	×	３を付ける
9	○	○	○	○	×	１を付ける
10	×	×	○	○	×	１と２を同時に外す
11	×	×	○	×	×	４を外す
12	○	○	○	×	×	１と２を同時に付ける
13	×	○	○	×	×	１を外す
14	×	○	×	×	×	３を外す
15	○	○	×	×	×	１を付ける
16	×	×	×	×	×	１と２を同時に外す（攻略完了）

図４　解法手順の整理方法（五連環）

この種の知恵の輪の最大の特徴である，「最初の一手」が重要な要素であることは実際に解いてみることで理解できる．最初の一手において，環１のみを外すか，または，環１および２を同時に外すかの二択を迫られる．環１のみを外す方が正解であるが，欲張って環１と２を同時に外して進めた場合，その後，環１～４が外れるものの，環５が外れないことに途中で気付き，初期状態に戻さなくてはならなくなる．このように欲張らない選択を最初の一手としているのは，五連，七連，九連のような奇数環タイプであり，奇数環タイプが連環系知恵の輪が良く紹介されるのはこのためであろうと考えられる．

§３　九連環

２章で紹介した五連環は，攻略（棹の解放）に辿り着くために，「最初の一手」と「一連の動き」の役割を理解し実践する必要がある．そこで，五連環の解法を修得した学生数名に対して五連環を解く時間を計測したところ，40 秒程度であった．五連環の場合，図４より，解法手数としては 16 手であるので，1 手当り平均 2.5 秒必要であることが分かる．

ここで本題としている九連環は，図１の様に丸環の数が９つであり，その解法手数がいくつになるのかが，興味深いところである．１番環と２番環の２環同時移動を１手とカウントする計算方法では，九連環の解法手数は 256 手にもなる．この手数は，先ほどの学生を対象とした計測から 1 手当り 2.5 秒とすれば，攻略するまでに 640 秒（10 分 40 秒）にもなる．このように攻略に要する膨大な手数が，この「九連環」を難解にしている要素の一つでもある．

五連環を攻略した学生のほとんどが，九連環を攻略するための理屈は分かっているものの，環の取付けおよび取外しの解法手数が 256 手と多く，集中力を欠いた途端，混乱に陥る様子が見てとれた．連環数が増して解法手数が多くなるに従い，飛躍的に集中力・忍耐力が必要となることがうかがえた．

九連環の解法手順について，図４で紹介した五連環の解法整理と同じ方法で表示したものを図５に示す．備考欄に攻略上の要点を記載しているので活用して頂きたい．最初の一手に気を付けて頂くことも重要であるが，まずは手元の９番環を外す目的で，１～７番環を全て外す必要がある．これを達成するためには，６４手目も必要となる．ようやく６５手で９番環を外したなら，つぎの目的は先ほど苦労して外した１～７番環を全て取り付けて８連環の状態にすることとなる．このように，苦労して外した環をまた元通りに組みなおす必要があるのも難解度を増す理由であろう．さらに，十連環や十一連環と環数が増えると飛躍的に解法手数が増していくが，連環数と解法手数の関係については，つぎの章で考察する．

	先端							手元		
手数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	備考
0	○	○	○	○	○	○	○	○	○	初期状態
1	×	○	○	○	○	○	○	○	○	最初の一手
2	×	○	×	○	○	○	○	○	○	
3	○	○	×	○	○	○	○	○	○	
4	×	×	×	○	○	○	○	○	○	
5	×	×	×	○	×	○	○	○	○	
6	○	○	×	○	×	○	○	○	○	
7	×	○	×	○	×	○	○	○	○	
8	×	○	○	○	×	○	○	○	○	
9	○	○	○	○	×	○	○	○	○	
10	×	×	○	○	×	○	○	○	○	
11	×	×	○	×	×	○	○	○	○	
12	○	○	○	×	×	○	○	○	○	
13	×	○	○	×	×	○	○	○	○	
14	×	○	×	×	×	○	○	○	○	
15	○	○	×	×	×	○	○	○	○	
16	×	×	×	×	×	○	○	○	○	
17	×	×	×	×	×	○	×	○	○	
18	○	○	×	×	×	○	×	○	○	
19	×	○	×	×	×	○	×	○	○	
20	×	○	○	×	×	○	×	○	○	
21	○	○	○	×	×	○	×	○	○	
22	×	×	○	×	×	○	×	○	○	
23	×	×	○	○	×	○	×	○	○	
24	○	○	○	○	×	○	×	○	○	
25	×	○	○	○	×	○	×	○	○	
26	×	○	×	○	×	○	×	○	○	
27	○	○	×	○	×	○	×	○	○	
28	×	×	×	○	×	○	×	○	○	
29	×	×	×	○	○	○	×	○	○	
30	○	○	×	○	○	○	×	○	○	
31	×	○	×	○	○	○	×	○	○	
32	×	○	○	○	○	○	×	○	○	9番環を外す目的で1～7番環を全て外していく
33	○	○	○	○	○	○	×	○	○	
34	×	×	○	○	○	○	×	○	○	
35	×	×	○	×	○	○	×	○	○	
36	○	○	○	×	○	○	×	○	○	
37	×	○	○	×	○	○	×	○	○	
38	×	○	×	×	○	○	×	○	○	
39	○	○	×	×	○	○	×	○	○	
40	×	×	×	×	○	○	×	○	○	
41	×	×	×	×	○	×	×	○	○	
42	○	○	×	×	○	×	×	○	○	
43	×	○	×	×	○	×	×	○	○	
44	×	○	○	×	○	×	×	○	○	
45	○	○	○	×	○	×	×	○	○	
46	×	×	○	×	○	×	×	○	○	
47	×	×	○	○	○	×	×	○	○	
48	○	○	○	○	○	×	×	○	○	
49	×	○	○	○	○	×	×	○	○	
50	×	○	×	○	○	×	×	○	○	
51	○	○	×	○	○	×	×	○	○	
52	×	×	×	○	○	×	×	○	○	
53	×	×	×	○	×	×	×	○	○	
54	○	○	×	○	×	×	×	○	○	
55	×	○	×	○	×	×	×	○	○	
56	×	○	○	○	×	×	×	○	○	
57	○	○	○	○	×	×	×	○	○	
58	×	×	○	○	×	×	×	○	○	
59	×	×	○	×	×	×	×	○	○	
60	○	○	○	×	×	×	×	○	○	
61	×	○	○	×	×	×	×	○	○	
62	×	○	×	×	×	×	×	○	○	
63	○	○	×	×	×	×	×	○	○	
64	×	×	×	×	×	×	×	○	○	
65	×	×	×	×	×	×	×	○	×	9番環外れる
66	○	○	×	×	×	×	×	○	×	
67	×	○	×	×	×	×	×	○	×	
68	×	○	○	×	×	×	×	○	×	
69	○	○	○	×	×	×	×	○	×	
70	×	×	○	×	×	×	×	○	×	
71	×	×	○	○	×	×	×	○	×	
72	○	○	○	○	×	×	×	○	×	
73	×	○	○	○	×	×	×	○	×	
74	×	○	×	○	×	×	×	○	×	八連環を完成させる目的で1～7番環を全て取り付けていく
75	○	○	×	○	×	×	×	○	×	
76	×	×	×	○	×	×	×	○	×	
77	×	×	×	○	○	×	×	○	×	
78	○	○	×	○	○	×	×	○	×	
79	×	○	×	○	○	×	×	○	×	
80	×	○	○	○	○	×	×	○	×	
81	○	○	○	○	○	×	×	○	×	
82	×	×	○	○	○	×	×	○	×	
83	×	×	○	×	○	×	×	○	×	
84	○	○	○	×	○	×	×	○	×	
85	×	○	○	×	○	×	×	○	×	

	先端							手元		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	備考
86	×	○	×	×	○	×	×	○	×	
87	○	○	×	×	○	×	×	○	×	
88	×	×	×	×	○	×	×	○	×	
89	×	×	×	×	○	○	×	○	×	
90	○	○	×	×	○	○	×	○	×	
91	×	○	×	×	○	○	×	○	×	
92	×	○	○	×	○	○	×	○	×	
93	○	○	○	×	○	○	×	○	×	
94	×	×	○	×	○	○	×	○	×	
95	×	×	○	○	○	○	×	○	×	
96	○	○	○	○	○	○	×	○	×	
97	×	○	○	○	○	○	×	○	×	
98	×	○	×	○	○	○	×	○	×	
99	○	○	×	○	○	○	×	○	×	
100	×	×	×	○	○	○	×	○	×	
101	×	×	×	○	×	○	×	○	×	
102	○	○	×	○	×	○	×	○	×	
103	×	○	×	○	×	○	×	○	×	
104	×	○	○	○	×	○	×	○	×	
105	○	○	○	○	×	○	×	○	×	
106	×	×	○	○	×	○	×	○	×	
107	×	×	○	×	×	○	×	○	×	八連環を完成させる目的で1～7番環を全て取り付けていく
108	○	○	○	×	×	○	×	○	×	
109	×	○	○	×	×	○	×	○	×	
110	×	○	×	×	×	○	×	○	×	
111	○	○	×	×	×	○	×	○	×	
112	×	×	×	×	×	○	×	○	×	
113	×	×	×	×	×	○	○	○	×	
114	○	○	×	×	×	○	○	○	×	
115	×	○	×	×	×	○	○	○	×	
116	×	○	○	×	×	○	○	○	×	
117	○	○	○	×	×	○	○	○	×	
118	×	×	○	×	×	○	○	○	×	
119	×	×	○	○	×	○	○	○	×	
120	○	○	○	○	×	○	○	○	×	
121	×	○	○	○	×	○	○	○	×	
122	×	○	×	○	×	○	○	○	×	
123	○	○	×	○	×	○	○	○	×	
124	×	×	×	○	×	○	○	○	×	
125	×	×	×	○	○	○	○	○	×	
126	○	○	×	○	○	○	○	○	×	
127	×	○	×	○	○	○	○	○	×	
128	×	○	○	○	○	○	○	○	×	
129	○	○	○	○	○	○	○	○	×	八連環
130	×	×	○	○	○	○	○	○	×	
131	×	×	○	×	○	○	○	○	×	
132	○	○	○	×	○	○	○	○	×	
133	×	○	○	×	○	○	○	○	×	
134	×	○	×	×	○	○	○	○	×	
135	○	○	×	×	○	○	○	○	×	
136	×	×	×	×	○	○	○	○	×	
137	×	×	×	×	○	×	○	○	×	
138	○	○	×	×	○	×	○	○	×	
139	×	○	×	×	○	×	○	○	×	
140	×	○	○	×	○	×	○	○	×	
141	○	○	○	×	○	×	○	○	×	
142	×	×	○	×	○	×	○	○	×	
143	×	×	○	○	○	×	○	○	×	
144	○	○	○	○	○	×	○	○	×	8番環を外す目的で1～6番環を全て外していく
145	×	○	○	○	○	×	○	○	×	
146	×	○	×	○	○	×	○	○	×	
147	○	○	×	○	○	×	○	○	×	
148	×	×	×	○	○	×	○	○	×	
149	×	×	×	○	×	×	○	○	×	
150	○	○	×	○	×	×	○	○	×	
151	×	○	×	○	×	×	○	○	×	
152	×	○	○	○	×	×	○	○	×	
153	○	○	○	○	×	×	○	○	×	
154	×	×	○	○	×	×	○	○	×	
155	×	×	○	×	×	×	○	○	×	
156	○	○	○	×	×	×	○	○	×	
157	×	○	○	×	×	×	○	○	×	
158	×	○	×	×	×	×	○	○	×	
159	○	○	×	×	×	×	○	○	×	
160	×	×	×	×	×	×	○	○	×	
161	×	×	×	×	×	×	○	×	×	8番環外れる
162	○	○	×	×	×	×	○	×	×	
163	×	○	×	×	×	×	○	×	×	
164	×	○	○	×	×	×	○	×	×	
165	○	○	○	×	×	×	○	×	×	
166	×	×	○	×	×	×	○	×	×	七連環を完成させる目的で1～7番環を全て取り付けていく
167	×	×	○	○	×	×	○	×	×	
168	○	○	○	○	×	×	○	×	×	
169	×	○	○	○	×	×	○	×	×	
170	×	○	×	○	×	×	○	×	×	
171	○	○	×	○	×	×	○	×	×	

	先端							手元		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	備考
172	×	×	×	○	×	×	○	×	×	
173	×	×	×	○	○	×	○	×	×	
174	○	○	×	○	○	×	○	×	×	
175	×	○	×	○	○	×	○	×	×	
176	×	○	○	○	○	×	○	×	×	
177	○	○	○	○	○	×	○	×	×	
178	×	×	○	○	○	×	○	×	×	
179	×	×	○	×	○	×	○	×	×	
180	○	○	○	×	○	×	○	×	×	
181	×	○	○	×	○	×	○	×	×	七連環を完成させる目的で1～7番環を全て取り付けていく
182	×	○	×	×	○	×	○	×	×	
183	○	○	×	×	○	×	○	×	×	
184	×	×	×	×	○	×	○	×	×	
185	×	×	×	×	○	○	○	×	×	
186	○	○	×	×	○	○	○	×	×	
187	×	○	×	×	○	○	○	×	×	
188	×	○	○	×	○	○	○	×	×	
189	○	○	○	×	○	○	○	×	×	
190	×	×	○	×	○	○	○	×	×	
191	×	×	○	○	○	○	○	×	×	
192	○	○	○	○	○	○	○	×	×	七連環
193	×	○	○	○	○	○	○	×	×	
194	×	○	×	○	○	○	○	×	×	
195	○	○	×	○	○	○	○	×	×	
196	×	×	×	○	○	○	○	×	×	
197	×	×	×	○	×	○	○	×	×	
198	○	○	×	○	×	○	○	×	×	
199	×	○	×	○	×	○	○	×	×	
200	×	○	○	○	×	○	○	×	×	7番環を外す目的で1～5番環を全て外していく
201	○	○	○	○	×	○	○	×	×	
202	×	×	○	○	×	○	○	×	×	
203	×	×	○	×	×	○	○	×	×	
204	○	○	○	×	×	○	○	×	×	
205	×	○	○	×	×	○	○	×	×	
206	×	○	×	×	×	○	○	×	×	
207	○	○	×	×	×	○	○	×	×	
208	×	×	×	×	×	○	○	×	×	
209	×	×	×	×	×	○	×	×	×	7番環外れる
210	○	○	×	×	×	○	×	×	×	
211	×	○	×	×	×	○	×	×	×	
212	×	○	○	×	×	○	×	×	×	
213	○	○	○	×	×	○	×	×	×	
214	×	×	○	×	×	○	×	×	×	
215	×	×	○	○	×	○	×	×	×	
216	○	○	○	○	×	○	×	×	×	
217	×	○	○	○	×	○	×	×	×	六連環を完成させる目的で1～5番環を全て取り付けていく
218	×	○	×	○	×	○	×	×	×	
219	○	○	×	○	×	○	×	×	×	
220	×	×	×	○	×	○	×	×	×	
221	×	×	×	○	○	○	×	×	×	
222	○	○	×	○	○	○	×	×	×	
223	×	○	×	○	○	○	×	×	×	
224	×	○	○	○	○	○	×	×	×	
225	○	○	○	○	○	○	×	×	×	六連環
226	×	×	○	○	○	○	×	×	×	
227	×	×	○	×	○	○	×	×	×	
228	○	○	○	×	○	○	×	×	×	
229	×	○	○	×	○	○	×	×	×	6番環を外す目的で1～4番環を全て外していく
230	×	○	×	×	○	○	×	×	×	
231	○	○	×	×	○	○	×	×	×	
232	×	×	×	×	○	○	×	×	×	
233	×	×	×	×	○	×	×	×	×	6番環外れる
234	○	○	×	×	○	×	×	×	×	
235	×	○	×	×	○	×	×	×	×	
236	×	○	○	×	○	×	×	×	×	五連環を完成させる目的で1～4番環を全て取り付けていく
237	○	○	○	×	○	×	×	×	×	
238	×	×	○	×	○	×	×	×	×	
239	×	×	○	○	○	×	×	×	×	
240	○	○	○	○	○	×	×	×	×	五連環
241	×	○	○	○	○	×	×	×	×	
242	×	○	×	○	○	×	×	×	×	
243	○	○	×	○	○	×	×	×	×	
244	×	×	×	○	○	×	×	×	×	
245	×	×	×	○	×	×	×	×	×	5番環外れる
246	○	○	×	○	×	×	×	×	×	
247	×	○	×	○	×	×	×	×	×	
248	×	○	○	○	×	×	×	×	×	
249	○	○	○	○	×	×	×	×	×	四連環
250	×	×	○	○	×	×	×	×	×	
251	×	×	○	×	×	×	×	×	×	4番環外れる
252	○	○	○	×	×	×	×	×	×	三連環
253	×	○	○	×	×	×	×	×	×	
254	×	○	×	×	×	×	×	×	×	3番環外れる
255	○	○	×	×	×	×	×	×	×	
256	×	×	×	×	×	×	×	×	×	攻略状態

図５　解法手順の整理方法（九連環）

§４ 解法手数

九連環のような連環系知恵の輪の解法手数については，大きく 2 種類の表記方法が考えられる．まず，一般的な表記方法としては，一つの環の移動を 1 手と数える方法．この場合，九連環の解法手数は 341 手[2)〜4),6),7),9)]として知られる．もう一つの表記方法は，基本は前者と同じであるが，図４や図６で紹介したように，1 番環と 2 番環の２環同時移動も 1 手として数える現実的な方法である．この場合，九連環の解法手数は 256 手となる．前者の表記方法は 2 進数による考察を行う場合に都合が良く，後者の表記法では攻略時間を推定する上で都合が良いといえる．いずれにしても一長一短があり，考察内容により選択する必要がある．

さて，ここまで五連環と九連環を主に紹介したが，これら以外の連環数と解法手数の関係を見出すことも工学的に興味深い．連環数 1〜10 までに対して，２種類の解法手数の対応を表１に示す．左側が一般的手数表記，右側が現実的手数表記となる．例えば十連環であれば，一般的手数表記では 682 手，現実的手数表記では 511 手となり，九連環の約 2 倍の手数が必要となることが分かる．

表１ 連環数と解法手数の対応（2 種類の表記方法）

一般的手数表記		現実的手数表記	
環数 x	手数 y	環数 x	手数 y
1	1	1	1
2	2	2	1
3	5	3	4
4	10	4	7
5	21	5	16
6	42	6	31
7	85	7	64
8	170	8	127
9	341	9	256
10	682	10	511

このような連環数と解法手数の対応から，関係式を考えてみる．簡単に偶数環と奇数環により別々に関係式を提示する方法が多く紹介されている[2)〜4)]が，一般的手数表記に対しては式(1)，現実的手数表記に対しては式(2)のように，偶数環と奇数環に関わらず一つの関係式で提示こともできる．

一般的手数表記：

$$y=\frac{2^{x+2}+(-1)^{x+1}-3}{6} \qquad (1)$$

現実的手数表記:

$$y=\frac{2^{x}+(-1)^{x+1}-1}{2} \qquad (2)$$

§５ おわりに

九連環が難解なパズルとして位置づけられる理由を考察し，以下の二つの主要な要因を紹介した．

（１）「最初の一手」に二択を迫られ，ここでミスをすると手詰まりとなる状況に行きつくまで，気付きにくい．

（２）解法に対する「一連の動き」は理解できても，その手数の多さにより，途中で混乱を起こしやすくなる．

以上の要因を工学的な視点で，攻略の一助とするためにつぎの解法整理を提案した．まず，エクセルを利用した視覚的に分かりやすい解法手順の整理方法を示した．さらに，連環数と解法手数の関係を数式で示し，解法手数の推定を容易にした．

今回紹介した知恵の輪「九連環」は，連環系の知恵の輪として代表とされる基本形態である．しかしながら，九連環の中国における歴史的背景は深く，様々な進化形態や応用形態が試行錯誤されている．今回紹介したエクセルを利用した解法手順の整理方法は，進化形態や応用形態の解法発見にも利用できると考えており，様々な連環系知恵の輪の考察手法として活用して頂きたい．

参考文献

1) 山辺正二郎編集：The メカニカルパズル 130，三推社・講談社，p.42，p.65，2006.

2) 藤村幸三郎，高木茂男：パズルの源流，ダイヤモンド社，p.55-79，1975

3) 高木茂男：パズル百科，講談社，p.67-88，1985.

4) 秋山久義：知恵の輪読本，新紀元社，p.17-20，p.73-74，p.92-93，p.132-136，p.161-177，2003.

5) 山本徹監修：図解 知恵の輪のすべて 歴史・分類・解き方はもちろん 手作りの知恵の輪から今話題のキャストパズルまで，文葉社，p.31-35，2002.

6) 高木茂男：パズル遊びへの招待，PHP 研究所，p.26-31，1994.

7) Pieter van Delft and Jack Botermans : CREATIVE PUZZLE OF THE WORLD, CASSELL LTD.，p.96-102，1978.

8) 澁澤龍彦編，芦ヶ原伸之：遊びの百科全書⑺玩具館（知恵の輪の世界），日本ブリタニカ，p.67-78，1980.

9) ジェリー・スローカム，ジャック・ボタマンズ（芦ヶ原伸之訳）：PUZZLES OLD&NEW パズル その宇宙，日本テレビ放送網株式会社，p.103-107，1988.

10) ジェリー・スローカム，ジャック・ボタマンズ（芦ヶ原伸之訳）：悪魔のパズル，日経サイエンス社，p.102，1995.

11) ジェリー・スローカム，ジャック・ボタマンズ（芦ヶ原伸之訳）：パズルの世界 解き方・作り方 101 例，日経サイエンス社，p.87，1993.