

株式市場におけるフラクタル分布の数理モデル

渡 部 健 一・田 中 稔次郎

(2004年4月30日原稿受付) / (2004年5月13日原稿受理)

Mathematical models of Fractal distribution in stock market

Kenichi WATANABE, Toshijiro TANAKA

Abstract

The research theme of Econophysics is divided into the change in the market price and the analysis of the enterprise scale. The law whose universality is very high has been confirmed about the enterprise scale / income / growth rate by analyzing the various data of the enterprise in field of the analysis of the enterprise size. In this paper, we extend the Takayasu-Sato-Takayasu (TST) model, reproduced the universal law such as Zipfs law of the change in the market price, Relations between size of the property and fluctuation, Relations between size of the property and income. Though Zipfs law could be reproduced, Relations between size of the property and fluctuation, and relations between size of the property and Income couldn't be reproduced with the usual TST model from the result of the simulation. But universal law can be reproduced with the extended TST model which we proposed.

1. はじめに

為替や株式など、社会活動の根底を支えている経済変動を支配する法則は全くといってよいほど明らかになっていない。つまり経済システムは人間が作り出しているにも関わらず、人間には完全にコントロール出来ないという事である。

近年この複雑な経済現象を統計的物理的な視点から見て、実証的に経済現象を解明していこうとする新しい分野が生まれている。この新しい分野はH. E. Stanleyによってエコノフィジクス (Econophysics) と名付けられた [1]。エコノフィジクスの研究テーマは現在の所、市場価格の変動と企業サイズの分析の2つに大きく分かれている。企業のサイズ分析では企業の様々なデータを解析し、企業規模・所得・成長率に関してかなり普遍性の高い法則を確認してきている [2, 3]。

本研究の目的は、近年企業の所得分布の研究で注目されている高安・佐藤・高安 (T S T) モデル[4]の拡張を行い、市場価格の変動のジップ則、資産の大きさとゆらぎの関係、資産の大きさと所得の関係などの普遍的な法則の再現をする事である。

2. フラクタル分布

フラクタル分布とは、ある量 s の確立分布 $P(s)$ が、

$$P(s) \propto s^{-a} \quad (1)$$

となるように、べき乗の形をとる分布である。フラクタル分布の特徴は、特徴的な値がないというスケール普遍性である。このような分布関係が現れるためには、その背景にある物理現象が特徴的なスケールをもたないという著しい性質がなくてはならない。

また、フラクタル分布の中でべき指数が -1 のものをジップ則と呼ぶ。この法則は1949年にジップが英単語の出現確率と順位の積が一定になる事を発見した。ジップ則は英単語の出現確率のみでなく、日本の市町村の順位と人口、企業の所得とその所得以上の所得を持つ企業数、各国の GDP、Webページの1日のヒット数と順位など、様々な対象からジップ則が発見されている。

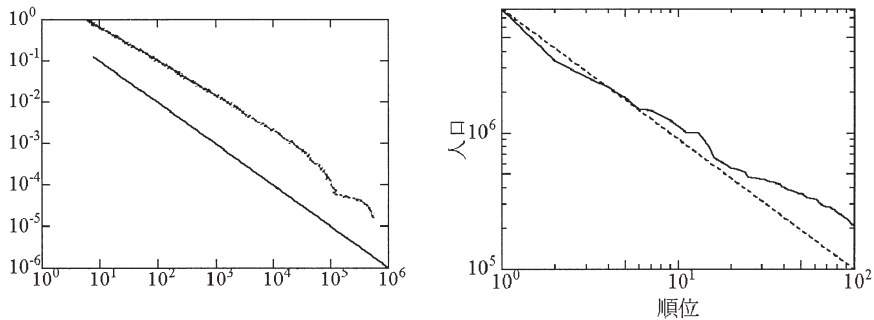


図1：(a) は企業所得とその累積確率の両対数プロット、(b) は日本の市町村の順位と人口の両対数プロット。各図の直線は -1 の直線である。

また、経済活動においては企業資産 A とゆらぎにおいて、企業変動率 $R(t)$ の標準偏差を資産の大きさ別に平均すると

$$\sigma \propto A^{-0.2} \quad (2)$$

に従うという報告がある。さらに企業の資産と所得 I の間にも

$$I \propto A^{0.8} \quad (3)$$

という関係がある。

3. T S Tモデル

高安・佐藤・高安ら [4] は、政治や国際情勢などの要素を排除し、売買の素過程のみに着目し、多数のディーラーが売買を行う事自体に着目した株式売買モデルを提案した。T S Tモデルは決定論的なディーラーによって支配される株式市場モデルである。各ディーラーは買い手と売り手に別れ、株を売買する事により自己の資産を増やす事を目的としている。 i 番目のディーラーの売値を S_i 、買値を B_i とすると資産を増やすためには $S_i > B_i$ を満足する必要がある。また、取引する条件は i 番目のディーラーの買値 B_i と j 番目のディーラーの売値 S_j に対して $S_j > B_i$ が成立する必要がある。ここで、簡略化の為に全てのディーラーの売値 S と買値 B の差を一定値 Λ と仮定すると、取引が成立する条件は

$$B_i - B_j \geq \Lambda \quad (4)$$

となる。

市場で N 人のディーラーが株の売買を行うとすると、市場で取引が成立するためには全てのディーラーの中で最大の希望買値と希望売値の間で

$$\max\{B(t)\} - \min\{B(t)\} \geq \Lambda \quad (5)$$

が成立する必要がある。

また、市場価格 $P(t)$ は売値と買値の平均値であると仮定し、

$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\max\{B\} + \min\{B\}) + \Lambda & (L(t) \geq \Lambda) \\ P(t-1) & (L(t) < \Lambda) \end{cases} \quad (6)$$

で求める。ここで、 $L(t)$ は最大と最小の買値の差である。売り手は手持ちの株を売る事ができるまで買値 $S (= B + \Lambda)$ を下げ続け、買い手は株を買う事ができるまで買値 B を上げ続けるものと仮定し、各ディーラーは以下の式に従って買値を更新する。

$$B_i(t+1) = B_i(t) + a_i(t) + c\Delta P_{prev} \quad (7)$$

ここで、 ΔP_{prev} は寸前に生じた市場価格の変化量、 c は ΔP_{prev} の影響、 a_i は各ディーラー固有の更新量である。仮定したディーラーの更新則より $a_i(t) < 0$ の時売り手、 $a_i(t) \geq 0$ の時買い手を意味する。

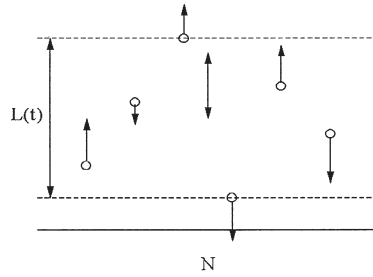


図2：横軸はディーラーの番号、縦軸は希望価格 $B_i(t)$ を示している。矢印は $a_i(t)$ を表し、その向きで $a_i(t)$ の符号を示している。 $L(t)$ は時刻 t における最大の買値と最小の売値の差である。

TSTモデルではどのディーラーも資産が少なく、売り手は株を売ると買い手に、買い手は株を売ると売り手に、立場を変えなければならないと仮定している。従って、 $a_i(t)$ の更新則は以下のようなになる。

$$a_i(t+1) = \begin{cases} -a_i(t) & \text{(取引が生じた時の売り手・買い手のディーラー)} \\ a_i(t) & \text{(取引が生じなかった時の全てのディーラー。または、} \\ & \text{取引が生じた時の売り手・買い手以外のディーラー)} \end{cases}$$

このモデルには確率的な要素はなく完全に決定論的である。

4. TSTモデルの拡張

4.1 所得・資産の導入

TSTモデルは所得や資産をあらわすパラメータが無い為、資産とそのゆらぎ、資産と所得に関する分布の検証を行う事が出来ない。そこで、所得・資産のパラメータの導入を行った。一般に資産はある単位時間の所得の累積を資産とするため、所得 $I_i(t)$ と資産 $A_i(t)$ を

$$\begin{aligned} I_i(t) &= \frac{1}{2}(B_i + S_j + \Lambda) \\ I_j(t) &= -\frac{1}{2}(B_i + S_j + \Lambda) \\ A_i(t) &= A_i(t-1) + I_i(t) \end{aligned} \quad (8)$$

と定義した。

4.2 複数回取引

T S T モデルは株式市場の複雑な要因を排除したモデルであるが、単純化しすぎているために現実の市場との剥離が激しくなっている。そこで、本研究ではT S T モデルの拡張（以降、拡張T S T モデル と呼ぶ）を行った。

まず最初取引回数の拡張を行った。T S T モデルでは1回の取引に参加できるディーラーは $\max\{B\}$ と $\min\{S\}$ の2人のみであり、たとえ他のディーラーが取引条件を満たしていたとしても、取引に参加する事が出来ない。そこで、買い手ディーラーと売り手ディーラーを希望買値の高い順に並び替えを行い、買い手は価格の高い順に、売り手は価格の安い順で取引を行うと仮定した。

また、市場価格 $P(t)$ は個々の取引から導き出される市場価格 $PP_k(t)$ の平均とする。 $PP_k(t)$ は次のように与えられる。

$$PP_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(B_i(t) + S_j(t)) & (L(t) \geq \Lambda) \\ P(t-1) & (L(t) < \Lambda) \end{cases} \quad (9)$$

ここで、 k は個々の取引を示す番号である。 $B_i(t), a_i(t)$ の更新則はT S T モデルと同様である。

4.3 資産規模に応じた取引

T S T モデルおよび拡張T S T モデル では、資産規模に関係なく各ディーラーは1ステップに1回しか取引を行う事が出来ない。そこで資産規模に応じて取引できる回数が変化するように拡張を行った（以降、拡張T S T モデル と呼ぶ。）取引回数は基本となる回数1回に資産/10.0を整数化した値を加えるものと定義する。

5. シミュレーション

其々のモデルでシミュレーションを行った結果が図3である。

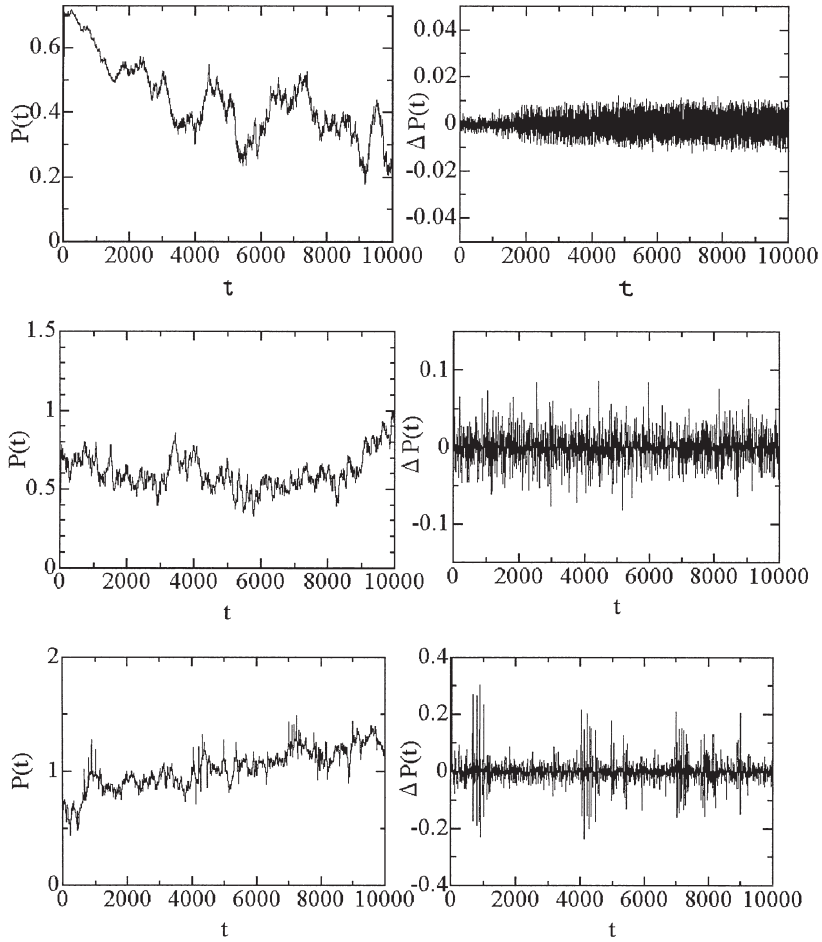


図3：市場価格 $P(t)$ と市場価格の変化量 $\Delta P(t)$ の時系列。一番上の図はTSTモデル、中の図は拡張TSTモデル、下の図は拡張TSTモデル。

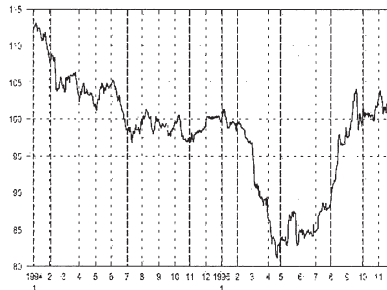


図4：現実の市場価格の時系列

図3、図4からTSTモデルおよびその拡張モデルで得られたデータが現実の市場と非常に似ているとすることが出来る。

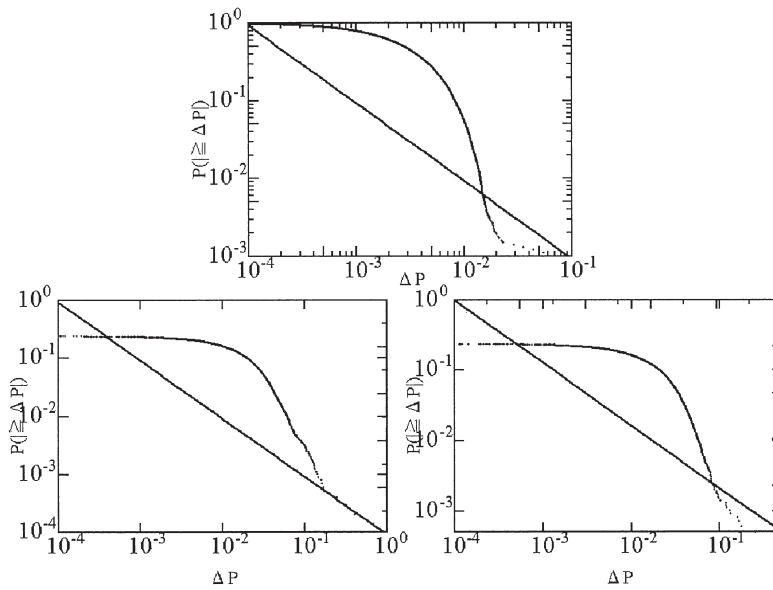


図 5 a : 市場価格の変動の両対数プロット。上はT S Tモデル、左下は拡張T S Tモデル、右下は拡張T S Tモデル

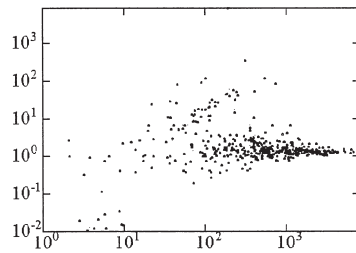


図 5 b : 市場価格の変化量の両対数プロット右から $N = 5, 10, 50, 100$

図 5 a は、市場価格の変動の両対数プロットである。この図から明らかなように、各モデル共に綺麗な傾きとならないのは、エージェント数、ステップ数がまだ足りない為である (図 5 b 参照)。

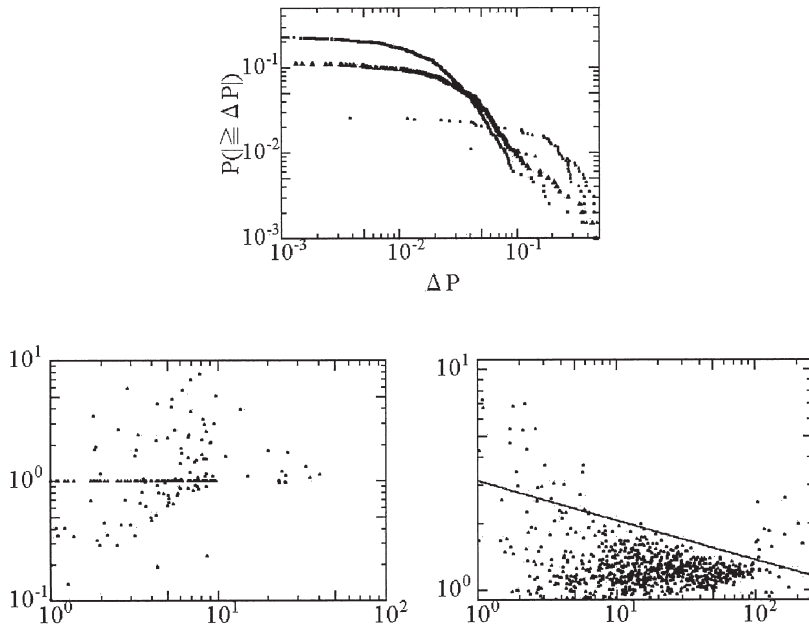


図6：資産と成長率の標準偏差の関係。上はT S Tモデル、左下は拡張T S Tモデル、右下は拡張T S Tモデル

資産と標準偏差の両対数プロットを図6に示す。この図から明らかなように、T S Tモデル、拡張T S Tモデル共に、資産に関係なくほぼ一定値を取っているが、拡張T S Tモデルはばらつきはあるものの-0.2の傾きに近づいていることが分かる。資産と所得の両対数プロットを図7に示す。

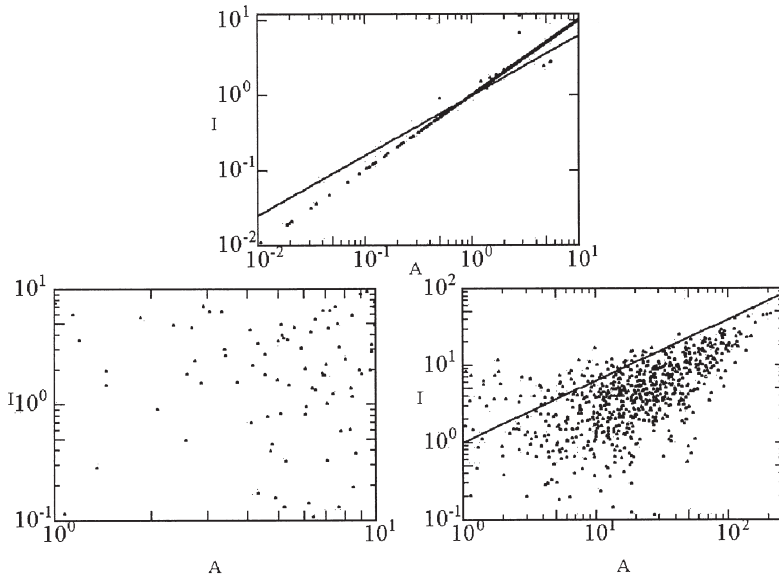


図7：資産と所得の関係。上はT S Tモデル、左下は拡張T S Tモデル、右下は拡張T S Tモデル

T S Tモデルでは資産と所得が比例関係にあり、拡張T S Tモデルでは資産の大きさに関係することなくほぼ一定の値を示しているが、拡張T S Tモデルでは $10^0 \sim 10^2$ の範囲で0.8の傾きを持っている事が分かる。

5. 結 論

シミュレーション結果から明らかなように、T S Tモデル、拡張T S Tモデルともにジップ則を確認する事が出来たが、資産の大きさとゆらぎの関係ではT S Tモデル、拡張T S Tモデル共に $\sigma \propto R[t]^{-0.2}$ のような振る舞いを取る事がなかった。こえはモデルでも、各ディーラーの資産量と取引量に関係がなく、取引量や取引回数に差がない(ただし、取引回数が多くなるようなディーラー、つまり α の値が大きなディーラーは、条件によっては大きな資産を持つという傾向はある)為と推測する事ができる。そこで、複数回取引を行う拡張モデルに更なる拡張を行い、資産規模に応じて取引を行うようなモデルでシミュレーションを行った。その結果、ばらつきは大きいものの $\sigma \propto R[t]^{-0.15 \sim -0.2}$ に近づく事は出来た。

また、資産の大きさと所得の関係についても検証を行った。従来のT S Tモデルでは資産の大きさと所得の関係は傾きが1の比例関係となり、拡張T S Tモデルは比例を見出す事が出来なかった。しかし、拡張T S Tモデルでは $I \propto A^{0.8}$ が現れた。

以上の結果から、従来のT S Tモデルよりも、我々の提案した資産規模に応じて取引を行うT S Tモデルのほうが普遍的な法則をより再現できる事が明らかになった。つまり、より現実に即したモデルといえるだろう。しかし、資産の大きさとゆらぎの関係はまだばらつきが大きく綺麗に $\sigma \propto R[t]^{-0.2}$ が現れる事が無い。従ってまだ実際の株式市場の取引過程となっている点や不足している点が存在すると考えられ、これを明らかにする事が、今後の課題になると思われる。

6. 参 考 文 献

- [1] R.N.Mantegna, H.E.Stanley, An Introduction to Econophysics. Cambridge University Press, (2000).
- [2] K.Okuyama, M.Takayasu and H.Takayasu. Zip 's law in income distribution of companies, Physica A.269 pp. 125-131.(1999).
- [3] 高安秀樹 フラクタル 朝倉書店 (1987).
- [4] 佐藤彰洋、高安秀樹 価格変動への統計物理アプローチ シミュレーション第17巻第4巻 pp.12-20 (1998).