

ホップフィールドニューラルネットワークに対する トンネル効果法の適用

松本 慎平[†] 田中稔次郎[†] 栗原 徹哉[†] 奥原 浩之[†]

(2004年5月18日原稿受付) / (2004年5月18日原稿受理)

Application of the Method of Tunnel Effect for Hopfield Neural Network

Shinpei Matsumoto Toshijiro Tanaka

Tetsuya Kurihara Koji Okuhara

概 要

ホップフィールドネットワークでは、非同期的にネットワークを時間発展させることによって、そのエネルギー関数の極小値を得ることができる。しかし、求めた極小値は最小値であるという保証はなく、また一旦極小値に収束すると、ネットワークはその状態から脱出することはできない。この初期状態依存性を克服するために、我々はネットワークの状態遷移に関する新しいアルゴリズムであるトンネル効果法を提案する。数値実験ではホップフィールドネットワークによる最適化問題にトンネル効果法を適用して、最適解探索に対する有効性を明らかにする。

1. まえがき

ホップフィールドはエネルギー関数を相互結合型ニューラルネットワークに導入し、最適化問題を解く方法を提案した [1,2,3]。ネットワークには最初に任意の初期状態を与え、時間発展と共に任意の素子の状態変化を繰り返しネットワークを更新する。ネットワークにおけるエネルギー関数は局所的解法である勾配法を用い、その値は時間と共に必ず減少する。エネルギー関数は多峰性であり、ホップフィールドネットワークの状態更新則に従う限りエネルギーの値は必ず減少し、その結果ネットワークは最終的に極小値に収束する。しかし、エネルギー関数には多くの極

[†] 広島県立大学経営・経営情報学科, 広島県

小値が存在するため、解として得た極小値が最小値とは限らない。またネットワークは一度極小値に収束するとそれ以降状態を更新できない。さらに問題の規模に比例してエネルギー関数の空間は大きくなり、従って有効な解を持つ極小値、並びに最小値の探索は困難となる。

ホップフィールドネットワークにおける極小値収束性、すなわち初期状態依存性の課題を解決する様々な方法は今日まで多数提案されている [4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14]。例えば、その代表的なモデルのひとつとしてボルツマンマシンがある [4,5,6]。これは、ノイズの大きさに対応する温度パラメータを徐々に下げながら、熱力学的自由エネルギーを最小化する確定的焼きなまし法の概念をニューラルネットワークに導入したモデルである。しかし、ボルツマンマシンを含め今日まで提案されたモデルの多くは、非常に複雑な処理を持つ。我々は容易に用いることは困難である。また実験において計算機処理に多くの時間が必要であり、有効な解を導き出すまでに膨大な実験時間を必要とする場合がほとんどである。

以上の問題点を踏まえ、我々は簡単な処理に従い、多くの実験時間を必要とせずホップフィールドネットワークの課題を解決する手法を提案する。この提案法を用いることにより、ネットワークは時間発展の過程であたかもトンネルを使用する様に容易にエネルギー関数の山を透過し、ネットワークを更新し、状態遷移を行う。本論分では、提案法の適用によるネットワークの状態更新を、量子力学の用語を用いて"トンネル効果法"と呼ぶ [15]。

従来の離散ホップフィールドネットワークでは、時間毎に任意の1個の素子を非同期的に更新し、この動作を繰り返す。この過程で、今日まで提案された多数のモデルでは、各時間ネットワークの状態は唯一である。それに対してトンネル効果法を適用したネットワークは、時間毎に2つ以上のネットワークを仮想的(バーチャル)に生成し並列的に存在させることにより、従来のネットワークよりも速く有効な解を獲得できる。

またトンネル効果法は、簡単な規則に従った新しいネットワークの生成過程と、複数のネットワークを存在させるための記憶スペースの確保だけで、複雑な処理を用いずに容易に実現可能である。このトンネル効果法を、離散ホップフィールドネットワークを用いた組合せ最適化問題の典型である"巡回セールスマン問題"、"Nクイーン問題"、"ヒッチコック問題"に適用して、数値実験によりその有効性を示した。

以下に本論文の構成を述べる。2.では、ホップフィールドネットワークの動作式とその特徴と問題点について説明する。次に3.では、ホップフィールドネットワークの問題点を解決するトンネル効果法を提案し、そのアルゴリズムについて説明する。4.では、提案法の有効性を示すために、数値実験によって、従来のホップフィールドネットワークとトンネル効果法を適用したホップフィールドネットワークとで最適解探索の比較を行い、提案したアルゴリズムの有効性を示す。最後に、5.でまとめと今後の課題を述べる。

2. ホップフィールドネットワークとトンネル効果の概要

2.1. ホップフィールドネットワーク

本論文では、システムの簡略化のためにディジタルニューラルネットワークを用いてシステムを構成する。素子は発火していれば1、静止していれば0の値を持つ。 N 個の素子を持つニューラルネットワークの、離散ホップフィールドネットワークに対する素子の動作式と入出力関数を以下に表す。

$$I_i(t) = \sum_{j \neq i, j=1}^N w_{ij} u_j(t) + s_i - \theta_i, \quad (1)$$

$$u_i(t+1) = \begin{cases} 1 & \text{if } I_i(t) > 0 \\ u_i(t) & \text{if } I_i(t) = 0 \\ 0 & \text{if } I_i(t) < 0 \end{cases} \quad (2)$$

ただし、 t は離散時刻、 $u_j(t)$ は j 番目の素子の出力値、 $I_i(t)$ 、 s_i 、 θ_i はそれぞれ i 番目の素子の内部電位、外力、閾値、また w_{ij} は素子 $u_i(t)$ 、 $u_j(t)$ 間の結合荷重を表す。ホップフィールドネットワークは素子間の結合定数が対称で、自己結合がないと仮定、すなわち $w_{ij} = w_{ji}$ 、 $w_{ii} = 0$ とする。

ホップフィールドは相互結合型ニューラルネットワークにエネルギー関数を導入し、以下のよう
に定義した [2,1].

$$E(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_{ij} u_i(t) u_j(t) - \sum_{i=1}^N (s_i - \theta_i) u_i(t). \quad (3)$$

エネルギー関数 $E(t)$ の時間差分は時間の経過と共に常に負または 0 となる。従って、非同期的に素子の状態更新を行う限りネットワークは $E(t)$ の値を常に小さくするように変化する。そして、最終的にエネルギー関数の極小値に収束する。そのため、たとえその値よりさらに低い値が存在しても、状態更新は不可能である。これをホップフィールドネットワークの時間空間における収束特性、エネルギー極小化特性という。

2.2. トンネル効果

量子力学では、原子よりも小さな粒子が、粒子の持っている全エネルギーよりも大きなエネルギーの薄い障壁を乗り越えて染み出す現象を、"トンネル効果"と呼ぶ [15]。古典物理学では、粒子の全エネルギーよりも大きい位置エネルギーの障壁を越えられないが、量子力学では、粒子の波動性のために、一定の確率で粒子が障壁をトンネルを通過するようにして出る事がある。その確率は、障壁の高さと厚さが増えると急速に減少する。

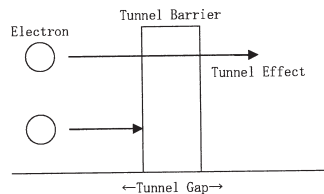


図 1. トンネル効果

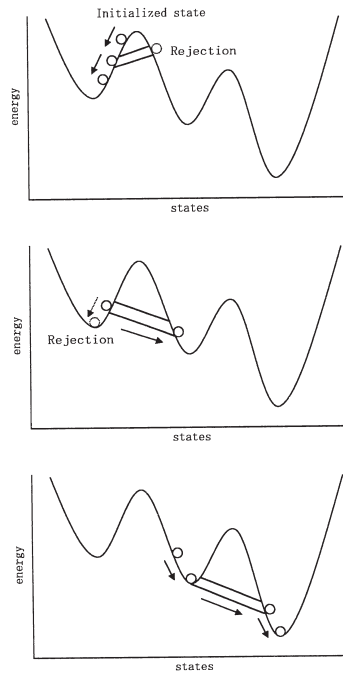


図2. エネルギー関数におけるトンネル効果

3. ホップフィールドネットワークに対するトンネル効果の適用方法

我々は前節で述べたホップフィールドネットワークの極小値収束問題を解決するアルゴリズムを提案する．このアルゴリズムは，量子力学のトンネル効果の概念を用いて表現できる．

ホップフィールドネットワークのエネルギー関数には，無数の山と谷が存在する．エネルギー関数の谷である極小値に到達した場合，このネットワークではニューロンの状態更新の規則に従う限り，その値に対応する問題の解が有効な値でなくてもネットワークは以降決して状態変化を起こせない．

そこで我々は，トンネルを通り抜けるかの様にして障害を乗り越える"トンネル効果"に着目した．ホップフィールドネットワークにおいてトンネル効果を用いることができれば，状態更新においてたとえネットワークがエネルギー関数の谷に収束した場合でも，従来のようにネットワークを収束させずにトンネルを用いてその状態から脱出しエネルギー関数の山を透過して，よりエネルギーの低い状態に遷移して有効な解を探索することが可能である．我々が提案するアルゴリズムをトンネル効果法とする．ホップフィールドネットワークにおけるトンネル効果法の概念を図2に，アルゴリズムをフローチャートとして図3に示す．

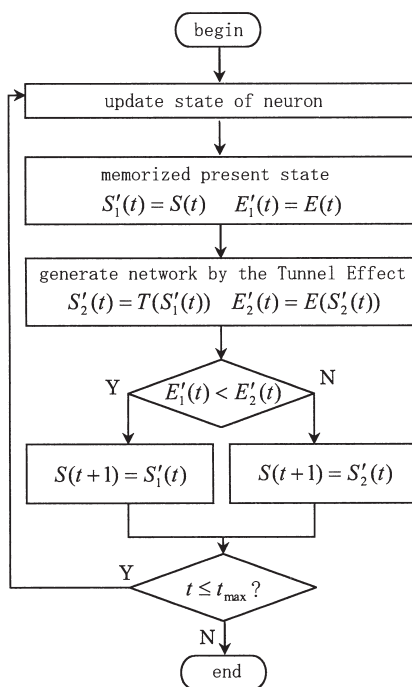


図3. 係数パラメータ $[\tau = 2]$ の場合のトンネル効果法のフローチャート

各離散時刻 t において、素子の状態更新と共に、トンネル効果法は以下の手順に従って適用される。まず、現在のネットワークの状態、すなわちニューロンの配列を $S(t)$ 、その状態におけるエネルギー関数の値 $E(t)$ を、

$$E(t) = E(S(t)), \quad (4)$$

とし、これを以下のように置く。

$$\begin{aligned} S'_1(t) &= S(t), \\ E'_1(t) &= E(t). \end{aligned} \quad (5)$$

次に、同時刻に複数のネットワークを生成する。これはトンネル効果法を適用した場合のトンネルの透過先に相当し、仮想的なものである。

$$S'_k(t) = T(S'_1(t)), \quad k = 2, 3, \dots, \tau. \quad (6)$$

遷移先のネットワークの数は係数パラメータ τ に従う。 τ の値は提案法により異なったネットワークを生成できる限り幾つでもよいものとし、 $\tau \geq 2$ とする。ここで、 T はトンネル効果法による状態の変換演算子である。

また、それぞれのネットワーク $S'_k(t)$ のエネルギー関数より、その値 $E'_k(t)$ を算出する。なお、 $S'_k(t)$ と $E'_k(t)$ は k によって対応している。

$$E'_k(t) = E(S'_k(t)), \quad k = 2, 3, \dots, \tau. \quad (7)$$

以上全てを同時刻に記憶させ、

$$E'_\eta(t) = \min \{E'_k(t) \mid k = 1, 2, \dots, \tau\}, \quad (8)$$

から、最小エネルギー $E'_\eta(t)$ に対応する状態 $S'_\eta(t)$ を導き出し、

$$S(t+1) = S'_\eta(t), \quad (9)$$

として、次の時刻のネットワークの状態を決定する。

これより、変換演算子 T の手順を示す。これは、トンネルの透過先となる新しいネットワークを生成するアルゴリズムである。

ここで、ニューラルネットワークは δ 次元で構成される。そして、各次元は集合 U をそれぞれ ν_δ 個持つ。例えば図4の場合では、ネットワークの素子配列は6行6列で構成されるので、各パラメータは $\delta = 2$, $\nu_1 = 6$, $\nu_2 = 6$ となる。

$$S(t) = \{U_1^\delta(t), U_2^\delta(t), \dots, U_{\nu_\delta}^\delta(t)\}, \quad (10)$$

$$U_i^\delta(t) = \{u_{i1}^\delta(t), u_{i2}^\delta(t), \dots, u_{i\nu_\delta}^\delta(t)\}, \quad (11)$$

と表すことができる。ここで、式(5)より、式(10)を次のように表す。

$$S'_1(t) = \{U_{11}^{\delta'}(t), U_{12}^{\delta'}(t), \dots, U_{1\nu_\delta}^{\delta'}(t)\}. \quad (12)$$

新しいネットワーク配列の生成のために、集合 U と対応した ut を持つ集合 ST

$$ST = \{ut_{11}^{\delta'}(t), ut_{12}^{\delta'}(t), \dots, ut_{1\nu_\delta}^{\delta'}(t)\}, \quad (13)$$

を用意する。この集合は、特定の集合の選出のために用いる集合である。 $ut(t)$ は通常、値として0を持ち、任意に選ばれた $ut(t)$ だけ1の値を持つ。ここで、 $ut_{ii}^{\delta'}(t) = 1$ であれば、集合 $U_{ii}^{\delta'}(t)$ を選出することを意味する。

次に、パラメータ λ を導入し、

$$\sum_{i=1}^{\nu_\delta} ut_{ii}^{\delta'}(t) = \lambda; \quad (14)$$

$$ut_{ii}^{\delta'}(t) \in \{0, 1\}, \forall ut_{ii}^{\delta'}(t) \in ST, \quad (15)$$

に従い, $ut_{i\alpha}^{\delta'}(t) = 1$ を満たす集合 U を全て含む集合 UT を定義する. そして, 集合 UT に含まれる集合 U を

$$U_{i\alpha}^{\delta''} = U_{i\beta}^{\delta'}; \alpha \neq \beta, \forall U_{i\beta}^{\delta'} \in UT, \tag{16}$$

に従って更新する. さらに,

$$U_{ii}^{\delta''} = U_{ii}^{\delta'}; \forall U_{ii}^{\delta'} \notin UT, \forall U_{ii}^{\delta'} \in S'_1(t), \tag{17}$$

と代入することにより

$$S''_1(t) = \{U_{11}^{\delta''}(t), U_{12}^{\delta''}(t), \dots, U_{1\delta}^{\delta''}(t)\}. \tag{18}$$

が得られる.

以上の処理は, 集合 ρ

$$\rho = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\delta\}. \tag{19}$$

に従う. 集合に含まれる各成分は, 各次元における式(10)から式(18)の処理回数を表す.

以上の処理を τ 回繰り返すことによって, 新しいネットワーク

$$S'_k(t) = (U_{k1}^{\delta'}(t), U_{k2}^{\delta'}(t), \dots, U_{k\nu\delta}^{\delta'}(t)), \tag{20}$$

$k = 2, 3, \dots, \tau$

が得られる.

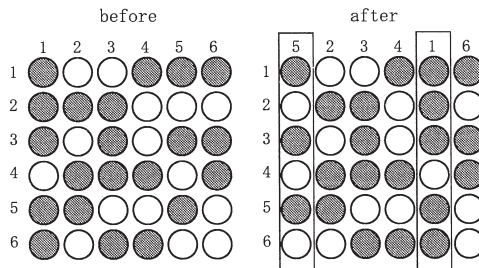


図4. トンネル効果法の適用によるネットワークの更新例

4. 最適化問題に対する数値実験

前節で提案したトンネル効果法の性能を明らかにするため、ホップフィールドネットワークを用いた組合せ最適化問題の典型として巡回セールスマン問題、 N クイーン問題、ヒッチコック問題を採り上げ、数値実験を行った。従来のホップフィールドネットワークとの比較により、提案法の有効性を確認する。

4.1. 巡回セールスマン問題への適用結果

巡回セールスマン問題 (Travelling Salesman Problem) とは、ある都市を出発した一人のセールスマンが N 都市全てを重複せずに 1 巡し、出発点に戻る経路の中で最短の経路を求める問題である [16,17]。図 5 に、ニューラルネットワークのマトリクスを示す。ネットワークは二次元で構成される。縦軸には都市名、横軸には巡回番号を表す。

本論文では、14及び22都市の2種類の都市配置データを用いて最適解の探索を行った。データはいずれも "burma14", "ulysses22" という名前で、WWWサイト[†]で公開されている。都市の位置を表す情報は座標として与えられる。

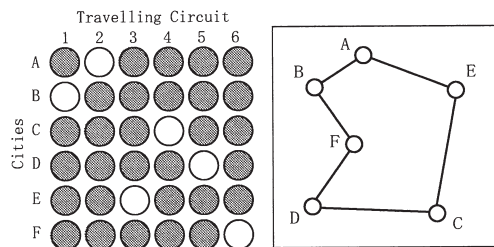


図 5. ニューラルネットワークのマトリクス表現

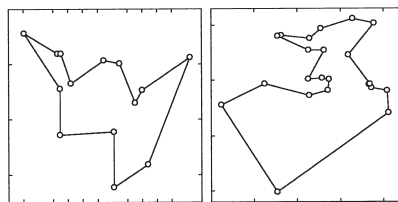


図 6. 都市配置. 左図はburma14, 右図はulysses22

[†]<http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/>

数値実験はそれぞれのデータで500回ずつ完全な任意の初期値を与え繰り返し行った。図8中の順序での巡回経路が最適解 d であり, burma14は $d = 30.86$, ulysses22は $d = 75.31$ である。1つの試行において t_{max} まで時間発展を行うようにし, これを制約条件として設定する。 t_{max} でネットワーク更新を打ち切り, もしここでネットワークが収束していない場合でもこれ以降状態更新は行わない。 burma14では $t_{max} = 2000$, ulysses22では $t_{max} = 3000$ と設定した。トンネル効果法のパラメータは, $\tau = 2, \rho = [1,1]$ とした。

数値実験の結果について考察する。図7, 図8に全試行における解の分布を表す。縦軸はエネルギーの値, 横軸は試行を表す。エネルギーの値は低ければ低いほど有効な解であり, TSPの制約条件を満たしている状態であればエネルギーの値と巡回距離が等しくなる。(○)は従来のホップフィールドネットワークのみで得た解, (●)はトンネル効果法を適用した場合のホップフィールドネットワークによる解である。図9より, 従来のホップフィールドネットワークでは, 解の精度は各試行において初期値に依存し幅広く分散することが分かる。しかしトンネル効果法の適用によって, 従来の解のバラつきを制御し, 初期値に関わらず有効な解を継続的に得られたことを確認できた。

数値実験の結果を数値的に比較する。表1の項目は上から最大, 最小, 平均の巡回距離, TSPの制約条件を満たした有効解, 近似解, 最適解を得た回数を示す。ホップフィールドネットワークでの解の探索は, 全ての初期条件においてある程度以上有用な解を得られなかったが, 提案法の適用により, ネットワークの信頼性を十分に高めることができた。特に平均巡回距離では, トンネル効果法により約半分ほどに抑えることができています。トンネル効果法による故意のネットワーク状態更新の回数は, burma14では1試行当たり平均151.6回, ulysses22では平均356.1回であった。処理時間は, トンネル効果法のパラメータを低く設定していたために, 従来のホップフィールドネットワークの処理時間と比較して大差はなかった。よってこの程度の問題規模であれば, 計算機に負荷を与えないアルゴリズムであることが分かった。

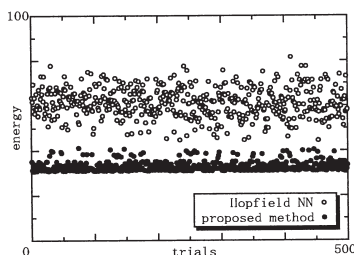


図7. 解の分布:burma14

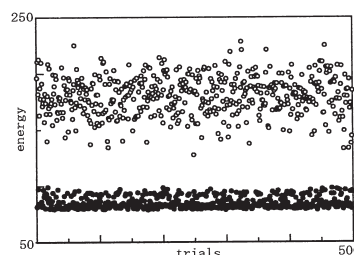


図8. 解の分布:ulysses22

表1. 実験の結果

	burma14		ulysses22	
	従来法	提案法	従来法	提案法
Max	79.32	42.62	224.88	101.35
Min	44.54	30.86	132.96	75.31
Ave	61.71	33.00	182.62	82.69
有効解	500	500	500	500
近似解	0	143	0	85
最適解	0	64	0	18

4.2. N クイーン問題への適用結果

N クイーン問題とは、 8×8 チェスボードの8クイーン問題を $n \times n$ チェスボードに一般化したものである [18,19]. $n \times n$ のチェスボードの中に、 n 個のクイーンをどのクイーンも互いに"効き"が当たらないような配置を解として探索する. 探索に用いるニューラルネットワークは、 $n \times n$ チェスボードの上にクイーンをどのように配置するか n^2 個のニューロンを使った2次元の行列で表現する.

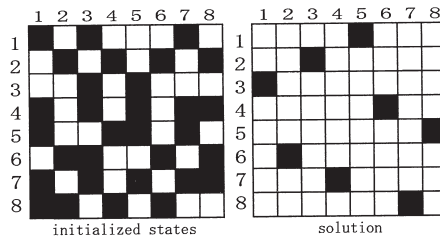


図9. 8クイーン問題

実験におけるパラメータの設定について述べる. トンネル効果法は巡回セールスマン問題と同様, $\tau = 2, \rho = [1,1]$ と設定した. 実験は $4 \leq n \leq 30$ (n はクイーンの数) の間で行い, それぞれの n について100回ずつ任意の初期値を与え実験を繰り返した. 実験時間としての制約条件 t_{max} は, 問題の規模に合わせて適切な長さを持つようにするため, $t_{max} = n^2 \cdot 20$ と設定した. N クイーン問題では, 従来法, 提案法それぞれ実験結果より, 解を得ることができた回数を比較することによってトンネル効果の性能を確かめた.

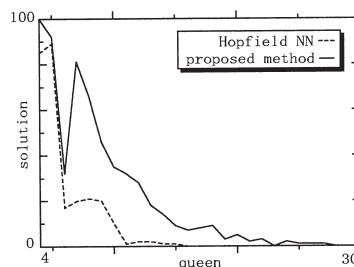


図10. 解の数の比較

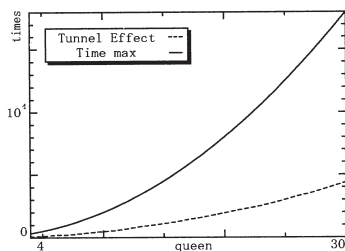


図11. トンネル効果適用回数

図10に、解の獲得数の比較を示す．通常のポップフィールドネットワークでは、設定した制約時間以内において $n \leq 15$ の範囲内で解を見付けることができた．しかしそれ以上の規模になると、実験時間内では有効な解を探索することができなかった．一方トンネル効果法を適用することにより、 $n \leq 30$ まで解を得ることができるようになった．

表 2. 実験 1 の輸送コスト

		工場									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
倉	1	4	7	5	9	2	6	5	3	5	8
	2	9	7	9	5	2	3	8	4	6	6
	3	6	4	3	2	8	6	2	7	9	5
庫	4	2	8	4	5	9	7	1	6	9	3
	5	9	3	7	5	3	4	8	2	6	4

表 3. 実験 1 の工場が必要とする部品数

工場	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
部品	16	8	5	12	6	14	3	9	10	17

表 4. 実験 1 の倉庫が所有している部品数

倉庫	1	2	3	4	5
部品	22	13	19	35	11

図11では、各問題の規模において、実験時間内にトンネル効果法によってどれだけネットワークの故意の状態変化を行っているのかを示している．実線で示しているのは実験時間での制約条件である t_{max} ，破線で示しているのはトンネル効果法を適用した回数の平均値である．図より、トンネル効果法の適用回数は、実験時間のおよそ4分の1程度で t_{max} に比例して数が大きくなることがわかった．

4.3. ヒッチコック問題への適用結果

ヒッチコック問題とは資源配分問題のひとつであり, " p 個の倉庫と q 個の工場がある. 倉庫 x に貯蔵されている部品数を S_x 個, 工場 y で必要としている部品数を D_y 個, 倉庫 x から工場 y へ部品 1 個を送る輸送コストを C_{xy} とするとき, 全体で必要とする輸送コストを最小にするにはどのような配分をすればよいか"という問題である. ここでは全ての倉庫に貯蔵されている部品の合計と, 全ての工場で必要とする部品の合計は等しい.

$q = 10, p = 5$ において, 2つの数値例を用いて数値実験を行った. 実験 1, 実験 2 共にネットワークには100回ずつ任意の初期値を与え, 実験を繰り返し行った. 実験データの詳細を表に示す. 例えば, 実験 1 の場合であれば, 倉庫 5 から工場 5 における輸送コストは3である. 実験 1 は総部品数を100, 実験 2 では総部品数を300に設定した.

ヒッチコック問題の場合, 相互結合型ニューラルネットワークは, "倉庫の数", "工場の数", "工場が必要とする最大の部品の数" の三次元空間により構成される. よって, 実験 1 で必要なニューロン素子の数は $5 \times 10 \times 17 = 850$, 実験 2 では $5 \times 10 \times 43 = 2150$ である. 今までの実験と同様に t_{max} を制約条件とし, t_{max} のときのネットワークの状態から得た総輸送コストを問題の解とする. 実験 1 は $t_{max} = 5000$, 実験 2 は $t_{max} = 7500$ とした. トンネル効果法は, ヒッチコック問題の場合のニューラルネットワークにおけるニューロンの配列空間は三次元であるので, $\tau = 2, \rho = [1, 1, 1]$ とした.

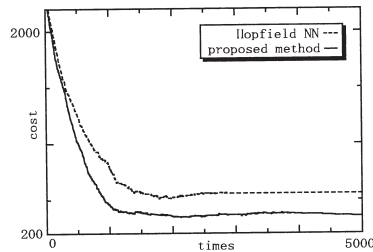


図12. 数値実験 1:輸送コストの結果

表 5. 実験 2 の輸送コスト

		工場									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
倉庫	1	22	8	10	15	9	17	12	6	9	23
	2	9	13	17	15	23	14	8	12	6	24
	3	24	7	15	19	32	16	5	13	25	18
庫	4	9	7	29	25	12	13	28	14	6	16
	5	6	14	13	24	8	26	20	17	9	15

表 6. 実験 2 の工場が必要とする部品数

工場	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
部品	26	32	20	12	31	39	28	34	35	43

表 7. 実験 2 の倉庫が所有している部品数

倉庫	1	2	3	4	5
部品	77	43	39	75	66

結果を考察する. 数値実験 1 において従来のホップフィールドネットワークの場合では, 100 試行での平均輸送コストとして 541 を得た. これに対してトンネル効果法の適用により, 平均輸送コストを 334 まで最適化できた. 100 試行中最良の解は, 従来のホップフィールドモデルでは 490, トンネル効果法の適用により 314 を得た. t_{max} までトンネル効果法によるネットワークの状態更新は, 平均で 4119 回行われていた.

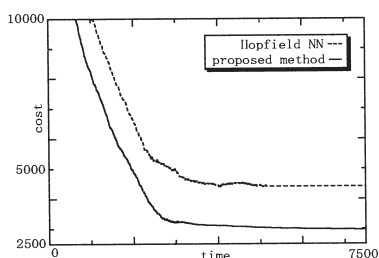


図 13. 数値実験 2 : 輸送コストの結果

数値実験 2 では, 通常のホップフィールドネットワークでは平均輸送コストは 4387 であったが, トンネル効果法の適用により, 平均 2971 まで最適化することができた. 最良の解は従来法で 4112, 提案法で 2940 である. この数値例の場合, トンネル効果法によるネットワークの状態更新は, t_{max} まで平均 4822 回行われていた.

5. む す び

本論文では, ホップフィールドネットワークにおける最適解の探索法としてトンネル効果法を提案し, 数値実験によってその有効性を明らかにした. 巡回セールスマン問題や N クイーン問題, ヒッチコック問題の最適解の探索に対するこの方法は従来法と比較して探索時間を大幅に短縮した. このトンネル効果のアルゴリズムは簡単でしかもプログラムのコーディングが容易であり, ニューラルネットワークによる最適化問題に対して有効な方法であると思われる.

今後の課題として, アナログニューロンを用いたニューラルネットワークにトンネル効果法を適用して最適化問題を解いた場合とデジタルネットワークの場合との比較や, トンネル効果法における状態更新において, 現在の任意にニューロン配列を入れ替える方法から, ある法則に従ったより有効な探索法の開発とその原理の解明が考えられる.

参 考 文 献

- [1] J.J.Hopfield, "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, zw" Proc, Natl, Acad, Sci, U.S.A, vol.79, pp.2554-2558, 1982.
- [2] J.J.Hopfield, "Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, zw"Proc, Nat, Acad, Sci, USA, 81, 3088-3092, 1984.

- [3] J.J.Hopfield and D.W.Tank, "Neural Computation of Decisions in Optimization Problems, zw" Biol, Cybern, vol.52, no.3, 141-152, 1985.
- [4] D.H.Ackley, G.E.Hinton and T.J.Sejnowski, "A learning algorithm for Boltzman Machines, zw" Cognitive Sci, no.9, pp147-169, Sept, 1985.
- [5] E.Aarts and J.korst, "Simulated Annealing and Boltzmann Machines , zw" Wiley, NY, 1989.
- [6] 喜多 一, "Hopfield型ニューラルネットワークとシミュレーティッドアニーリング, zw" 人工知能誌, vol.7, no.6, pp.970-979, 1992.
- [7] S.Abe, "Global convergence and suppression of spurious states of the Hopfield neural networks, zw"IEEE Trans, Circuits & Syst, I, vol.40, pp.246-257, April, 1993.
- [8] G.W.wilson and G.S.Pawley, "On the stability of the travelling salesman problem algorithm of Hopfield and Tank, zw"Biol, Cybern, vol.58, pp.63-70, 1988.
- [9] 安部重夫, "ホップフィールドネットワークの重みの決定法とその評価, zw" 情処学論, vol.34, no.1, pp.21-28, Jan, 1993.
- [10] 上坂吉則, "ホップフィールドマシンと擬似勾配系, zw" 数理科学, vol.8, no.8, pp.14-19, Aug, 1991.
- [11] 村島定行, 淵田孝康, "多段遷移ニューラルネットワークによる 最小値探索, zw" 信学論 (D-), vol.J73-D- , no.12, p.2012, Dec, 1990.
- [12] 松田 聖, "対称神経回路網における解の安定性, zw" 信学論 (D-), vol.J77-D- , no.7, pp.1366-1374, July, 1994.
- [13] 唐 政, 金 海和, 村尾健次, 石塚彦, 淡野公一"ホップフィールドネットワークにおける山登り学習法, zw" 電学論 (A), vol.J83-A, no.3, pp.319-331, March, 2000.
- [14] 村田定行, 豊平隆之, 淵田孝康, 宮島廣美, "積結合含む神経回路網の最適化問題への応用, zw" 信学技報, CAS93-103, 1994.
- [15] Microsoft (R) Encarta (R) Reference Library 2003, (C) 1993-2002 Microsoft Corporation.

- [16] 武田光男, "神経回路網と組合わせ最適化問題, zw" 数理科学, no.289, 1987.
- [17] 山本芳嗣, 久保幹雄, "巡回セールスマン問題への招待, zw" 朝倉書店, 1997.
- [18] 武藤佳恭, "ニューラルネットワーク, zw" 産業図書, 1996.
- [19] M.ガードナー, 高木茂男訳, "数学ゲーム , zw" ブルーバックスB-249, 講談社, 1974.